ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 2

УДК 519.71

МАТЕМАТИКА

Э. В. Егиазарян

Метрические свойства систем булевых уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 27/IV 1980)

Известно, что многие вопросы функционирования дискретных управляющих систем сводятся к решению систем булевых уравнений с зависимыми или независимыми переменными либо к определению числа их решений. Таковы, например, некоторые задачи синтеза цифровых автоматов, нахождения внутренне и внешне устойчивых множеств в графе, вопросы теории тестов и др. Системы булевых уравнений являются удобной моделью для исследования поведения управляющей системы, в частности, ЦЭВМ. Постановки вопросов о поведении управляющих систем в «типичном» случае восходят к работам К. Шеннона и О. Б. Лупанова. В настоящей работе для типичного случая приводятся асимптотические оценки числа решений систем булевых уравнений и оценивается сложность описания множества всех решений системы посредством дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.), реализующих характеристические функции множества решений.

Всюду в статье под log понимается логарифм по основанию 2. Все не определяемые здесь понятия можно найти в ([1-3]).

1. Пусть $S_{n,l}$ —множество всех различных систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_l(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{cases}, \tag{1}$$

где $f_i \in P_n$, $f_i \neq f_j$ при $i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant l)$, а P_n обозначает множество всех булевых функций, зависящих от n переменных. Бинарный набор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (1), если $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Относительно числа решений $t(S)$ почти всех систем S множества $S_{n,l}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. 1. *Если $n - l \to \infty$ при $n \to \infty$, то для почти всех систем S множества $S_{n,l}$ имеет место $t(S) \sim 2^{n-l}$.*

2. *Если $n-l\to-\infty$ при $n,\ l\to\infty$, то почти все системы множества $S_{n,l}$ не имеют решений.*

3. *Если $n-l$ ограничено при $n\to\infty$, то для почти всех систем S множества $S_{n,l}$ число решений ограничено сверху произвольной функцией $\varphi(n)$, удовлетворяющей условию $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.*

2. Пусть $S_{l,m,n}$ — множество всех систем из l уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)=1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_l(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_m)=1 \end{cases}, \tag{2}$$

где $x_i (1\leqslant i\leqslant n)$ — булевые переменные, $y_j (1\leqslant j\leqslant m)$ — неизвестные булевые функции от n переменных; $f_i\neq f_j$ при $i\neq j$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant l)$. Набор булевых функций $(\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_m(x_1,\ldots,x_n))$ называется решением системы (2), если при подстановке в систему (2) вместо переменных y_j функций φ_j, $j=1,2,\ldots,m$, все уравнения обращаются в тождества. Для числа решений $t(S)$ систем S множества $S_{l,m,n}$ справедлива

Теорема 2. 1. *Если $m-l-n\to\infty$ при $n,\ m\to\infty$, то для почти всех систем S множества $S_{l,m,n}$ $t(S)\sim 2^{(m-l)2^n}$.*

2. *Если $m-l-\log(n\ln 2)\gg-\log(1+2^{-l})+\dfrac{1}{\varphi(n)}$, $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и $\varphi(n)=o(n)$, то почти все системы множества $S_{l,m,n}$ имеют хотя бы одно решение.*

3. *Если $m-l-\log(n\ln 2)\leqslant-\log(1+2^{-l})-\dfrac{1}{\psi(n)}$, где $\psi(n)\to\infty$ и $\psi(n)=o(n)$, то почти все системы множества $S_{l,m,n}$ не имеют решений.*

3. Для описания множества M_S всех решений системы булевых уравнений S достаточно реализовать булевую функцию f_S, равную единице на множестве M_S и нулю на $E^n\setminus M_S$, некоторой д. н. ф. (если $M_S\neq\varnothing$). Тогда каждая элементарная конъюнкция в д. н. ф., реализующей функцию f_S, будет задавать „семейство" решений, а объединение всех семейств, соответствующих конъюнкциям в д. н. ф., даст множество M_S. Сложность описания множества решений системы S в большой мере характеризуется числом и рангом конъюнкций в д. н. ф., реализующей f_S. Поэтому вызывает интерес исследование длины сокращенной и кратчайшей д. н. ф., реализующих f_S, их „строение", число тупиковых д. н. ф. и т. д.

Будем называть вышеопределенную функцию f_S характеристической функцией системы S. Обозначим через $P_{n,l}$ „множество" всех булевых функций, зависящих от n переменных, такое, что каждая функция повторяется в нем столько раз, для скольких систем из множества $S_{n,l}$ она является характеристической. Очевидно, что $P_{n,l}=P_n$, а при $l>1$ существуют функции, которые не являются характеристическими ни для каких систем из $S_{n,l}$. Относительно функций множества $P_{n,l}$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. 1. *Если* $\log\frac{\log n}{l}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то у почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *для длины сокращенной д. н. ф.* $s(f)$ *имеет место*

$$s(f)\sim\sum_{k=\mu}^{\mu+1}\frac{C_n^k 2^{n-k}}{2^{l2^k}}\left(1-\frac{1}{2^{l2^k}}\right)^{n-k},$$

где $\mu=\left[\log\frac{\log n}{l}\right]$.

2. *Если* $\log\frac{\log n}{l}\not\to\infty$, *а* $n-l\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *имеет место*

$$s(f)\sim\sum_{k=\mu_1}^{\mu_2}\frac{C_n^k 2^{n-k}}{2^{l2^k}}\left(1-\frac{1}{2^{l2^k}}\right)^{n-k},$$

где $\mu_1=\max\{0,\mu\}$, $\mu_2=\max\{0,\mu+2\}$.

Теорема 4. *Пусть* $n-l\to\infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f)\geqslant\begin{cases}\dfrac{l2^{n-l}(1-\delta)}{\log n\log\dfrac{\log n}{l}} \ (0<\delta<1) \ \text{при} \ \dfrac{\log n}{l}\to\infty;\\[2ex] \dfrac{l2^{n-l-3}(1-\delta_{n,l})}{\log n\log\dfrac{\log n}{l}} \ (\delta_{n,l}\to 0) \ \text{при} \ \dfrac{\log n}{l}>2 \ \text{и} \ \dfrac{\log n}{l}\not\to\infty (n\to\infty);\\[2ex] \dfrac{l2^{n-l-3}(1-\delta_{n,l})}{\log n} \ (\delta_{n,l}\to 0) \ \text{при} \ 1<\dfrac{\log n}{l}\leqslant 2;\\[2ex] 2^{n-l-3}(1-\delta_{n,l})(\delta_{n,l}\to 0) \ \text{при} \ \log n\leqslant l.\end{cases}$$

Теорема 5. *При* $\frac{\log n}{l}\to\infty$ *для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f)<\frac{l2^{n-l+1}(1+\delta'_{n,l})}{\log n\log e},\ \delta'_{n,l}\to 0 \ \text{при} \ n\to\infty.$$

Теорема. 6. *Пусть* $n-l\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $P_{n,l}$ *число* $t(f)$ *тупиковых д. н. ф. удовлетворяет неравенствам:*

1. *Если* $\frac{\log n}{l}\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$t(f)<(2^{2^{n-l}})(1-\varepsilon_1(n))\log n(\log\log n-\log e),$$
$$\varepsilon_1(n)\to 0 \ \text{при} \ n\to\infty.$$

2. *Если* $2 < \dfrac{\log n}{l} \not\to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^{n-l}}\right)^{(1+\varepsilon_2(n))\log n \log\left(\frac{8\log n}{l}\log\frac{\log n}{l}\right)},$$

$$\varepsilon_2(n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3. *Если* $1 < \dfrac{\log n}{l} \leqslant 2$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^{n-l}}\right)^{5(1+\varepsilon_3(n))\log n},$$

$$\varepsilon_3(n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

4. *Если* $\dfrac{\log n}{l} \leqslant 1$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^{n-l}}\right)^{4(1+\varepsilon_4(n))\log n},$$

$$\varepsilon_4(n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Перечисленные свойства почти всех булевых функций множества $P_{n,l}$ при $l = 1$ исследовались в работах ([1,3]).

4. Пусть не всюду определенная (частичная) функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на множестве $M^f \subseteq E^n$ и принимает значения 0 и 1. Множество M^f разбивается на два подмножества M_0^f и $M_1^f (M^f = M_0^f \cup M_1^f,\ M_0^f \cap M_1^f = \varnothing)$ такие, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ на } M_1^f, \\ 0 \text{ на } M_0^f, \\ \text{не определена на } E^n \setminus M^f. \end{cases}$$

Обозначим через Q_n множество всех частичных функций, зависящих от n переменных. Пусть $Q_{n,l}$ — множество всех различных систем вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_l(x_1, \ldots, x_n) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

где $\quad f_i \in Q_n,\ f_i \neq f_j$ при $i \neq j (1 \leqslant i,\ j \leqslant l)$.

Бинарный набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (3), если $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1,\ i = 1, 2, \ldots, l$. Относительно числа решений $t(Q)$ почти всех систем Q множества $Q_{n,l}$ в ([3]) приведено утверждение, аналогичное теореме 1.

Сопоставим каждой системе $Q \in Q_{n,l}$ характеристическую булеву функцию $f_Q(x_1, \ldots, x_n)$, равную единице на множестве решений M_Q системы Q и нулю на $E^n \setminus M_Q$. Пусть $Q_{n,l}$ — множество булевых функций, зависящих от n переменных такое, что каждая функция встречается в нем столько раз, для скольких систем множества $Q_{n,l}$ она является характеристической функцией. Для почти всех функций множества $Q_{n,l}$ в ([3]) приведены оценки числа k-мерных интервалов и асимптотика длины сокращенной д. н. ф., реализующей функцию из множества $Q_{n,l}$. В настоящей статье приводятся другие метрические характеристики.

Теорема 7. *Пусть* $n - l\log 3 \to \infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $Q_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f) \geqslant \begin{cases} \dfrac{l 2^n 3^{-l}(1-\delta)}{\log_3 n \log \dfrac{\log_3 n}{l}} \ (0 < \delta < 1) \text{ при } \dfrac{\log_3 n}{l} \to \infty; \\ \dfrac{l 2^{n-3} 3^{-l}(1-\delta_{n,l})}{\log_3 n \log \dfrac{\log_3 n}{l}} \ (\delta_{n,l} \to 0) \text{ при } \dfrac{\log_3 n}{l} > 2 \text{ и } \dfrac{\log_3 n}{l} \not\to \infty \ (n \to \infty); \\ \dfrac{l 2^{n-3} 3^{-l}(1-\delta_{n,l})}{\log_3 n} \ (\delta_{n,l} \to 0) \text{ при } 1 < \dfrac{\log_3 n}{l} \leqslant 2; \\ 2^{n-3} 3^{-l}(1-\delta_{n,l})(\delta_{n,l} \to 0) \text{ при } \log_3 n \leqslant l. \end{cases}$$

Теорема 8. *При* $\dfrac{\log_3 n}{l} \to \infty$ *для почти всех функций* f *множества* $Q_{n,l}$ *длина* $p(f)$ *кратчайшей д. н. ф. удовлетворяет неравенству*

$$p(f) < \frac{l 2^n 3^{-l+1}(1+\delta'_{n,l})}{\log n \log e}, \ \delta'_{n,l} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 9. *Пусть* $n - l\log 3 \to \infty$ при $n \to \infty$. *Тогда для почти всех функций* f *множества* $Q_{n,l}$ *число* $t(f)$ *тупиковых д. н. ф. удовлетворяет неравенствам:*

1. *Если* $\dfrac{\log_3 n}{l} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^n 3^{-l}}\right)^{(1+\varepsilon_n)\log n \log \frac{\log_3 n}{l}}, \ \varepsilon_n \to 0$$

2. *Если* $2 < \dfrac{\log_3 n}{l} \not\to \infty$ $(n \to \infty)$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^n 3^{-l}}\right)^{(1+\varepsilon'_n)\log n \log\left(\frac{8\log_3 n}{l} \log \frac{\log_3 n}{l}\right)}, \ \varepsilon'_n \to 0$$

3. *Если* $1 < \dfrac{\log n}{l} \leqslant 2$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^n 3^{-l}}\right)^{5(1+\varepsilon''_n)\log n}, \ \varepsilon''_n \to 0$$

4. *Если* $\dfrac{\log_3 n}{l} \leqslant 1$, *то*

$$t(f) < \left(2^{2^n 3^{-l}}\right)^{4(1+\varepsilon'''_n)\log n}, \ \varepsilon'''_n \to 0$$

Ереванский государственный
университет

Է. Վ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

Բուլյան հավասարումների սիստեմների մետրիկական բնութագրիչներ

Աշխատանքում դիտարկվում է n-փոփոխականից կախված բուլյան և մասնակի բուլյան ֆունկցիաներով l հավասարումներից կազմված սիստեմների բազմությունը։ l պարամետրի փոփոխման լրիվ սպեկտրում կամ գնահատվում է լուծումների քանակը, կամ արտածվում է նրանց ասիմպտոտիկան համարյա բոլոր սիստեմների համար։ Սիստեմի լուծումների բազմությունը նկարագրելու համար սահմանվում է բուլյան ֆունկցիա, որը սիստեմի լուծումների բազմության վրա ընդունում է մեկ արժեքը, և համարյա բոլոր սիստեմների համար գնահատվում է այդ ֆունկցիան իրացնող դ. ն. ձ.-երի բարդությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Глаголев*, в сб.: Проблемы кибернетики, вып. 19 (1967). [2] *Э. В. Егиазарян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 2 (1979). [3] *Ю. И. Журавлев*, Труды МИАМ СССР, т. 51, (1958). *А. А. Сапоженко*, в сб.: Дискретный анализ, вып. 21, Новосибирск (1972).