ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 1

УДК 539.375

МЕХАНИКА

О. Б. Агаларян, С. А. Назаров

Об изменении коэффициентов интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 5/VI 1980)

Исследование напряженно-деформированного состояния скручиваемого призматического стержня, в котором конец трещины приближается к поверхности, представляет практический интерес для расчетов прочности. Ясно, что выходу трещины на поверхность могут соответствовать существенные изменения в работе стержня. В этой статье асимптотически изучается влияние расстояния конца трещины от края на наиболее важные характеристики—коэффициенты интенсивности.

1°. Постановка задачи. Рассмотрим призматический стержень Q_h с сечением Ω_h. Область Ω_h задается равенством $\Omega_h = \Omega \setminus N_h$, где Ω—ограниченная область в R^2 с гладкой (класса C^∞) границей $\partial\Omega$, содержащая отрезок $N_h = \{(x, y) \in R^2 : y = 0, x \in [h, 1]\}$ при $h > 0$; точка O, начало координат, принадлежит ∂G, касательная к ∂G в точке O совпадает с осью Oy. Кручение стержня Q_h осуществляется внешней нагрузкой τ_z, приложенной к боковой поверхности, а также крутящим моментом M, заданным на торцах стержня. Математически задача формулируется следующим образом: найти функцию u^h (смещение в направлении оси цилиндра Q_h), которая удовлетворяет краевой задаче [1].

$$\Delta u^h(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \Omega_h,$$
$$(\partial u^h / \partial n)(x, y) = g(x, y), \qquad (x, y) \in \partial\Omega_h, \tag{1}$$

где n—внешняя нормаль, $g \in C(\partial\Omega_0)$, $g = \omega^{-1}\tau^0_{nz} + \mu(y\cos(n, x) - x\cos(n, y))$, ω—угол скручивания.

Как известно, для разрешимости задачи (1) необходимо:

$$\int_{\partial\Omega_h} g(x, y)\, ds = 0;$$

это условие будет считаться выполненным при любом $h \in (0, 1/2)$. Под решением задачи (1) понимаем функцию $u^h \in W^1_2(\Omega_h)$, нормированную условием: $u^h((1, 0)) = 0$.

2. Асимптотика. В этом разделе при помощи алгорифма ([2]) конструируется асимптотика решения u^h при $h \to 0$. В качестве основного приближения берется решение задачи

$$\Delta u^0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0,$$
$$(\partial u^0/\partial n)(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_0; \quad u^0((1, 0)) = 0. \tag{2}$$

Функция u^0, вообще говоря, не принадлежит пространству $C(\Omega_h)$. Поэтому вблизи точки O асимптотику необходимо искать при помощи решений другой задачи. Обозначим через (n, s) систему локальных координат вблизи точки O (n — нормальная к $\partial\Omega$, s — касательная составляющие). Сделаем замену $(n, s) \to (\xi, \eta) = h^{-1}(n, s)$. Так как граница $\partial\Omega$ гладкая, то главная (по h) часть оператора Δ_{xy}, записанного в координатах (ξ, η), совпадает с оператором $h^{-2}\Delta_{\xi\eta}$. После указанной замены и перехода к $h = 0$ область Ω_h преобразуется в область $\Pi = \{(\xi, \eta) : \xi > 0\} \setminus \{(\xi, \eta) : \eta = 0, \xi \geqslant 1\}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta\Gamma(\xi, \eta) = 0, \ (\xi, \eta) \in \Pi; \ (\partial\Gamma/\partial n)(\xi, \eta) = 0, \ (\xi, \eta) \in \partial\Pi.$$

Решением этой задачи из класса $W^1_{2, loc}(\Pi)$, растущим на бесконечности не быстрее степени ρ^δ ($\delta > 0$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$) является функция

$$a\Gamma + b,$$

где a, b — произвольные постоянные.

$$\Gamma(\xi, \eta) = \log\left\{\left(\sqrt{\frac{(\xi+1)^2+\eta^2}{4}} - \frac{\eta}{\sqrt{(\xi+1)^2+\eta^2}\sqrt{1-\rho^2+\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\eta^2}}}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1-\rho^2+\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\eta^2}}{4\sqrt{(\xi+1)^2+\eta^2}}\right\}. \tag{3}$$

Для функции Γ справедливы асимптотические формулы

$$\Gamma(\xi, \eta) = \log\rho + \log 2 + O(\rho^{-1}), \ \rho \to \infty, \ \eta > 0,$$
$$\Gamma(\xi, \eta) = -\log\rho - \log 2 + O(\rho^{-1}), \ \rho \to \infty, \ \eta < 0.$$

Вернемся к рассмотрению задачи (2). Обозначим через G функцию Грина для задачи Неймана в области $\Omega \setminus N_0$; полюсы этой функции расположены в точках $(0, +0)$ и $(0, -0)$; $G((1, 0)) = 0$ (см. ([3])). Для G справедлива асимптотическая формула

$$G(x, y) = \log r + G_+ + O(r), \quad r \to 0, \ y > 0,$$
$$G(x, y) = -\log r - G_- + O(r), \quad r \to 0, \ y < 0. \tag{4}$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$, $G_\pm$ — константы.

Следуя [2], асимптотику функции u^h вне $\sqrt{h}$-окрестности точки O ищем в виде

$$u^h(x, y) \sim u^0(x, y) + AG(x, y), \tag{5}$$

а в $\sqrt{h}$-окрестности — в виде

$$u^h(x, y) \sim A\Gamma(h^{-1}n, h^{-1}s) + B, \tag{6}$$

где A и B — постоянные, подлежащие определению. Найдем эти постоянные из условия совпадения асимптотики правых частей соотношений (5) и (6) в зоне $r \sim \sqrt{h}$. Получим систему

$$\begin{gathered} u^0_+ + A(G_+ + \log(h/2)) - B = 0, \\ u^0_- + A(G_- - \log(h/2)) - B = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $u^0_\pm = u^0(0, \pm 0)$. Решение системы (7) имеет вид

$$\begin{gathered} A = (u^0_- - u^0_+)(2\log h + G_+ - G_- - \log 4)^{-1}, \\ B = \{u^0_-(G_+ + \log(h/2)) - u^0_+(G_- - \log(h/2))\}(2\log h + G_+ - G_- - \log 4)^{-1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{gathered} u^h(x, y) = (u^0(x, y) + AG(x, y))\chi\left(\frac{r}{h}\right) + (A\Gamma(h^{-1}n, h^{-1}s) + B) \times \\ \times (1 - \chi(r)) - (B + A\log(2r/h)y|y|^{-1})\chi(r/h)(1 - \chi(r)) + O(h), \end{gathered} \tag{9}$$

где χ — функция из $C^\infty(R^1)$, $\chi(t) = 1$ при $t > 1/2$, $\chi(t) = 0$ при $t < 1/4$. Оценка разности решения u^h и построенного асимптотического представления следует из [2]. Отметим, что постоянные A и B из (8) суть рациональные функции $\log h$. Разложения такого типа возникали в работах [2,4,5].

Следствием представления (9) являются асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности:

$$\begin{gathered} K_h = K_0 + AK_G + O(h), \\ \mathbf{K}_h = h^{-1/2} A \mathbf{K}_1 + O(h^{1/2}), \end{gathered} \tag{10}$$

где K_h, K_0 и K_G — коэффициенты при выражении $R^{1/2}\cos(\varphi/2)$ в асимптотике ($R \to 0$) функций u^h, u^0 и G; (R, φ) — система полярных координат с центром (1, 0); $\mathbf{K}_h$ и $\mathbf{K}_1$ — аналогичные коэффициенты у функций u^h и Γ в точках (h, 0) и (1, 0) соответственно. Из формулы (3) вытекает, что

$$\mathbf{K}_\Gamma = 1.$$

3°. Пример. Пусть область Ω является единичным кругом $\{(x, y): (x-1)^2 + y^2 < 1\}$. В этом случае функция G находится явно:

$$G(x, y) = \log\left|\left(1 - \frac{y}{\sqrt{2(x-1+\sqrt{(1-x)^2+y^2})}}\right)^2 + \frac{x-1+\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{2}\right| - \log r.$$

Имеем: $G_+ = -G_- = -2\log 2$, $K_G = 1/\sqrt{2}$. Так как

$$T(g) = u^0_+ - u^0_- - \frac{2}{\pi}\int\limits_{\partial\Omega_0} g(x, y)G(x, y)ds$$

(см., например, ([3]) и ([6])), то формулы (9) принимают вид:

$$K_h = K_0 - T(g)(\sqrt{8}\log(h/8))^{-1} + O(h),$$

$$\mathcal{K}_h = -h^{-1/2}T(g)(2\log(h/8))^{-1} + O(h^{1/2}).$$

Авторы благодарны Н. Ф. Морозову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР
Ленинградский государственный
университет

Հ. Բ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ

Ոլորման ժամանակ պրիզմատիկ ձողում ինտենսիվության գործակիցների փոփոխումը երկայնական ճաքի զարգման դեպքում

Դիտարկվում է կողմնային մակերևույթի ուղղահայաց մտնող երկայնական ճաքով պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը։ Ճաքի ծայրի և կողմնային մակերևույթի միջև եղած h հեռավորությունը փոքր է։ Կառուցված է դեպլանացիայի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան ըստ h-ի, ինչպես նաև բերված են ինտենսիվության գործակիցների համար ասիմպտոտիկ բանաձևեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян, Б. А. Абрамян*, Кручение упругих тел, М., Физматгиз, 1963. [2] *В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский*, ДАН СССР, т. 219, № 1 (1979). [3] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1950. [4] *Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская*, Техническая физика, т. 43, вып. 1 (1973). [5] *А. М. Ильин*, Матем. сб., т. 103, № 2 (1977). [6] *В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский*, Mathematische Nachrichten, Bd. 76 (1977).