ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 1

УДК 514 752.44

МАТЕМАТИКА

В. А. Мирзоян

Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаляном 4/IX 1980)

В настоящей работе для m-мерного подмногообразия M_m n-мерного пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ (c—кривизна пространства) вводится понятие коммутирующего нормального векторного поля и изучается локальное строение таких подмногообразий. Этот класс подмногообразий включает в себя класс подмногообразий с параллельным нормальным векторным полем, который рассматривался в работе [1]. В частности, подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем несут ортогональную сопряженную систему подмногообразий или ортогональную сопряженную сеть и обладают рядом интересных общих свойств. Подмногообразия, несущие ортогональную сопряженную систему или ортогональную сопряженную сеть, рассматривались в работах [2–6] (см. также обзор [7]).

Пусть M_m является m-мерным подмногообразием n-мерного пространства постоянной кривизны $M_n(c)$. Касательное и нормальное расслоения подмногообразия M_m мы будем обозначать, соответственно, через $T(M_m)$ и $N(M_m)$. В этих расслоениях риманова связность объемлющего пространства индуцирует естественные связности: в $T(M_m)$—связность Леви-Чивита ∇ индуцированной римановой метрики на M_m, а в $N(M_m)$—некоторую метрическую связность $\nabla^\perp$, называемую нормальной связностью подмногообразия M_m. Обозначим через $X(M_m)$ алгебру Ли касательных к M_m векторных полей, а через $X^\perp(M_m)$— модуль векторных полей, нормальных к M_m. Для любого $\xi\in X^\perp(M_m)$ через A_ξ будем обозначать второй фундаментальный тензор подмногообразия M_m, соответствующий полю ξ. В дальнейшем всюду пользуемся следующим обозначением: $[A_\xi, A_\eta]=A_\xi A_\eta-$ $-A_\eta A_\xi \forall \xi,\eta\in X^\perp(M_m)$. За всеми остальными сведениями отсылаем к монографии [8].

Во всех исследованиях, посвященных изучению строения подмногообразия M_m с параллельным нормальным векторным полем ξ, тем или иным способом доказывается инволютивность распределений

$$T^{\lambda_u}: x\in M_m \to T_x^{\lambda_u} = \{X\in T_x(M_m);\ A_\xi(X)=\lambda_u X\},$$

где λ_u, $u=1,\ldots,t$, являются собственными значениями тензора A_ξ в точке $x\in M_m$ (в той области на M_m, в которой кратности этих собственных значений постоянны). Следующая теорема, не требуя параллельности ξ, дает необходимое и достаточное условие инволютивности указанных распределений.

Теорема 1. *Пусть M_m является подмногообразием пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ и пусть $\xi\in\mathfrak{X}^\perp(M_m)$—некоторое нормальное векторное поле. Для того, чтобы распределение*

$$T^\lambda: x\in M_m\to T_x^\lambda=\{Z\in T_x(M_m);\quad A_\xi(Z)=\lambda Z\},$$

где λ — некоторое собственное значение тензора A_ξ, было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы $\forall X,\ Y\in\mathfrak{X}(M_m)$ таких, что $X_x, Y_x\in T_x^\lambda$, выполнялось равенство

$$X(\lambda)Y-Y(\lambda)X+A_{\nabla^\perp_Y\xi}(X)-A_{\nabla^\perp_X\xi}(Y)=0. \qquad (1)$$

Следующая теорема указывает некоторый частный случай, когда равенство (1) выполняется.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 и пусть $[A_\xi,\ A_{\nabla^\perp_Y\xi}]=0$ $\forall Y\in\mathfrak{X}(M_m)$. Тогда распределения*

$$T^{\lambda_u}:\ x\in M_m\to T_x^{\lambda_u}=\{X\in T_x(M_m); A_\xi(X)=\lambda_u X\},$$

где λ_u, $u=1,\ldots,t$, являются собственными значениями тензора A_ξ, инволютивны, а соответствующие им интегральные многообразия M^{λ_u} образуют на M_m ортогональную систему.

Пусть M_m является подмногообразием пространства постоянной кривизны $M_n(c)$.

Определение. Нормальное векторное поле $\xi\in\mathfrak{X}^\perp(M_m)$ будем называть коммутирующим, если $[A_\xi,\ A_\eta]=0$ $\forall\eta\in\mathfrak{X}^\perp(M_m)$.

Следующие леммы доказывают существование коммутирующих нормальных векторных полей.

Лемма 1. *Всякое параллельное нормальное векторное поле ξ является коммутирующим.*

Лемма 2. *Если нормальная связность подмногообразия M_m плоская, то каждое нормальное векторное поле ξ является коммутирующим.*

Лемма 3. *Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно нормального поля $\xi\in\mathfrak{X}^\perp(M_m)$, то ξ— коммутирующее нормальное векторное поле.*

Подмногообразие с коммутирующим нормальным векторным полем описывает следующая

Теорема 3. *Пусть M_m является подмногообразием с коммутирующим нормальным векторным полем ξ в пространстве пос-*

тоянной кривизны $M_n(c)$ *и пусть* A_ξ — *второй фундаментальный тензор поля* ξ.

Тогда

(а) *распределения*

$$T^{\lambda_u}: \ x \in M_m \to T_x^{\lambda_u} = \{X \in T_x(M_m); \ A_\xi(X) = \lambda_u X\},$$

где λ_u, $u = 1, \ldots, t$, *являются собственными значениями тензора* A_ξ, *инволютивны, а их интегральные многообразия* M^{λ_u} *образуют на* M_m *ортогональную сопряженную систему;*

(б) *каждое* M^{λ_u}, *при* $\dim M^{\lambda_u} > 1$, *является омбилическим относительно* ξ. *При этом* ξ, *как нормальное векторное поле на* M^{λ_u}, *является коммутирующим для* M^{λ_u};

(в) *если тензор* A_ξ *имеет* m *попарно различных собственных значений, то нормальная связность подмногообразия* M_m *будет плоской; при* $n = m + 2$ *нормальная связность всегда плоская.*

Подмногообразие с коммутирующим нормальным векторным полем можно описать более детально, если накладывать другие дополнительные условия. Верны следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и пуст* M^{λ_u} — *некоторое интегральное многообразие, определенное по этой теореме* ($\dim M^{\lambda_u} > 1$). *Если ограничение* $A_\xi|_{M^{\lambda_u}}$ *тензора* A_ξ *на* M^{λ_u} *ковариантно постоянно, то* M^{λ_u} *является вполне геодезическим в* M_m.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и пусть тензор* A_ξ *является ковариантно постоянным. Тогда* (а) *распределения* T^{λ_u}, *определенные в теореме 3, параллельны, а их интегральные многообразия* M^{λ_u} *являются вполне геодезическими в* M_m; (б) *тензор* $A_{\nabla^\perp_X \xi}$ *имеет собственные значения* $X(\lambda_u) \forall X \in \mathfrak{X}(M_m)$. *Если объемлющее пространство является евклидовым, то* $M_m = M^{\lambda_1} \times \ldots \times M^{\lambda_t}$. *Если векторное поле* ξ *является параллельным, то все* λ_u *постоянны.*

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и пусть* $[A_{\nabla^\perp_X \xi}, A_{\nabla^\perp_Y \xi}] = 0 \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M_m)$. *Тогда каждое интегральное многообразие* M^{λ_u}($\dim M^{\lambda_u} > 1$), *как подмногообразие в* M_m, *имеет плоскую нормальную связность.*

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и пусть* M_m *является омбилическим относительно* $\nabla^\perp_X \xi \ \forall X \in \mathfrak{X}(M_m)$. *Тогда каждое интегральное многообразие* M^{λ_u}($\dim M^{\lambda_u} > 1$) *является вполне омбилическим подмногообразием с плоской нормальной связностью в* M_m.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и пусть* $A_{\nabla^\perp_Y \xi} = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{X}(M_m)$. *Тогда* (а) *каждое интегральное многообразие* M^{λ_u}, $\dim M^{\lambda_u} > 1$, *как подмногообразие в* M_m, *является вполне омбилическим и имеет плоскую нормальную связность;*

(б) λ_u *постоянно на* M^{λ_u} *при* $\dim M^{\lambda_u} > 1$;

(в) *если* $\lambda_u = \mathrm{const}$, *то* M^{λ_u} *является вполне геодезическим в* M_m *подмногообразием;*

(г) *если* A_ξ *имеет только два постоянных значения* λ_1, λ_2, *то распределения* T^{λ_1}, T^{λ_2} *будут параллельными.*

Выражаю искреннюю благодарность Ю. Г. Лумисте за обсуждение результатов настоящей работы и ценные замечания.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна.

Վ. Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

Կոմուտացվող նորմալ վեկտորական դաշտով ենթաբազմություններ

Դիցուք M_m-*ն հանդիսանում է* m-*չափանի ենթաբազմություն* n-*չափանի* $M_n(c)$ *հաստատուն կորության տարածության մեջ, ξ-ինչ-որ նորմալ վեկտորական դաշտ է և* A_ξ *այդ վեկտորական դաշտին համապատասխանող երկրորդ ֆունդամենտալ տենզորը։ Ներկա աշխատանքում գտնվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ հետևյալ բաշխումների լրիվին ինտեգրելիության համար*

$$T^{\lambda_u}: \ x\in M_m \to T_x^{\lambda_u}=\{X\in T_x(M_m);\ A_\xi(X)=\lambda_u X\},$$

որտեղ $\lambda_u, u = 1, \dots, t$, *հանդիսանում են* A_ξ *տենզորի սեփական արժեքները։* M_m *ենթաբազմաձևության համար ներմուծվում է կոմուտացվող նորմալ վեկտորական դաշտի գաղափարը և ապացուցվում է, որ եթե ξ նորմալ վեկտորական դաշտը հանդիսանում է կոմուտացվող, ապա* T^{λ_u} *բաշխումները լրիվին ինտեգրելի են և նրանց ինտեգրալ բազմաձևությունները* M_m *ենթաբազմաձևության վրա կազմում են ուղղանկյուն համալուծ սիստեմ։ Դիտարկված են տարբեր դեպքեր։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян,* Изв. вузов. Математика, т. 5, 148—157 (1974). [2] *М. А. Акивис,* ДАН СССР, т. 6, 1247—1249 (1963). [3] *М. А. Акивис,* Изв. вузов. Математика, т. 10, 3—11 (1970). [4] *В. Т. Базылев,* Итоги науки. Геометрия 1963. ВИНИТИ АН СССР, 138—164, 1965. [5] *В. Т. Базылев,* Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 7, 105—116 (1975). [6] *В. В. Рыжков,* ТММ о-ва, т. 7, 179—226, 1958. [7] *Ю. Г. Лумисте,* Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР), т. 13, 273—340 (1975). [8] *Chen B.-Y.,* Geometry of submanifolds. New York, Marcel Dekker, 1973.