ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 1

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

О продолжении отображений пространств до непрерывных отображений их расширений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 9/VII 1980)

Предполагается, что рассматриваемые в этой заметке отображения непрерывны, а пространства и их расширения хаусдорфовы.

Пусть $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ —расширения соответственно пространств X, Y и $i_Y: Y \to \tilde{Y}$—отображение вложения. $\tilde{X}$ будем называть расширением, допускающим продолжение отображения $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$, если отображение $i_Y \circ f: X \to \tilde{Y}$ продолжимо на все $\tilde{X}$.

Задаче продолжения отображений посвящено большое число работ, в большинстве которых исследуется случай, когда $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ являются расширениями Катетова kX и kY [1-6].

В настоящей заметке приведены некоторые утверждения, касающиеся как этой задачи, так и задачи об одновременном продолжении семейства отображений на одно и то же расширение. В случае локально H-замкнутого X указывается наименьшее его расширение, на которое продолжается данное отображение (или семейство отображений) относительно данного расширения $\tilde{Y}$. Рассматриваются также случаи продолжения на такие расширения, как на расширение Фомина σX, наибольшее расширение типа μ μX, одноточечные H-замкнутые расширения типа Фомина $\sigma_0 X$, типа μ $\mu_0 X$ и одноточечную бикомпактификацию $\beta_0 X$ [7].

Пусть C_X —множество всех свободных открытых ультрафильтров пространства X. В работе [7] каждой паре $[U, D]$, где U—непустое подмножество множества C_X, а D—разбиение U на бикомпактные подмножества, сопоставлен определенный класс $\hat{X}_{[U,D]}$ 0-эквивалентных, отличных от X расширений пространства X, который в случае $U = C_X$ состоит из H-замкнутых расширений и обозначается через $\hat{X}_D$. Добавим к этим классам еще один класс $\hat{X}_\varnothing = \hat{X}_{[\varnothing,\varnothing]}$, состоящий из самого X, как своего расширения.

$\hat{X}_{[U,D]}$ назовем классом продолжимости $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$, если он содержит расширение $\tilde{X}$, допускающее продолжение f относительно $\tilde{Y}$.

Для любой точки $y \in \tilde{Y}$ обозначим через U_y множество всех $u \in C_X$, по которым y является пределом отображения $g = i_Y \circ f$, и пусть $D_f(\tilde{Y})$ — множество всех непустых U_y, когда y пробегает $\tilde{Y}$. Ясно, что $D_f(\tilde{Y})$ является разбиением множества $U(f, \tilde{Y}) = \bigcup \{U_y : y \in \tilde{Y}\}$.

Предложение 1. *$\hat{X}_{[U,D]}$ является классом продолжимости отображения $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$ тогда и только тогда, когда разбиение D вписано в $D_f(\tilde{Y})$.*

Следствие. *Расширение $\tilde{X}$, отличное от X и допускающее продолжение $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$, существует тогда и только тогда, когда $U(f, \tilde{Y}) \neq \varnothing$.*

Теорема 1. *H-замкнутое расширение пространства X, допускающее продолжение отображения $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$, существует тогда и только тогда, когда $U(f, \tilde{Y}) = C_X$. При этом $\hat{X}_D$ является классом продолжимости f относительно $\tilde{Y}$ для любого D, вписанного в $D_f(\tilde{Y})$.*

Пусть $C(f, \tilde{Y})$ — множество всех $\hat{X}_{[U,D]}$, являющихся классами продолжимости $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$, упорядоченное отношением $\hat{X}_1 > \hat{X}_2$, если для некоторого $X_1 \in \hat{X}_1$ и некоторого $X_2 \in \hat{X}_2$, существует θ-непрерывное отображение X_1 в X_2, тождественное на X.

Следствие 1. *В $C(f, \tilde{Y})$ существует наименьший класс в том и только в том случае, когда $D_f(\tilde{Y})$ разбивает $U(f, \tilde{Y})$ на бикомпактные подмножества. При этом наименьший класс отличен от $\hat{X}_\varnothing$ тогда и только тогда, когда $U(f, \tilde{Y}) \neq \varnothing$, и состоит из H-замкнутых расширений тогда и только тогда, когда $U(f, \tilde{Y}) = C_X$.*

Следствие 2. *Пусть X локально H-замкнуто. Тогда для* любого $f: X \to Y$ и любого $\bar{Y}$ в $C(f, \bar{Y})$ существует наименьший класс продолжимости f относительно $\bar{Y}$.

Следствие 3. *H-замкнутое расширение $\bar{X}$, допускающее продолжение $\bar{f}: \bar{X} \to \bar{Y}$ отображения $f: X \to Y$, принадлежит наименьшему классу продолжимости f относительно $\bar{Y}$ тогда и только тогда, когда сужение $\bar{f}$ на нарост $\bar{X} \setminus X$ инъективно.*

Из расширений X_1, X_2 пространства X будем считать, что X_1 больше X_2, если существует отображение X_1 в X_2, тождественное на X.

Предложение 2. *В каждом классе $\hat{X}_{[U,D]}$ продолжимости $f: X \to Y$ относительно $\bar{Y}$ расширение типа Катетова является наибольшим расширением, допускающим продолжение f относительно $\bar{Y}$. Если же X либо полурегулярно, либо локально H-замкнуто, то в $\hat{X}_{[U,D]}$ существует и наименьшее такое расширение.*

Теорема 2. *Пусть X локально H-замкнуто. Тогда для любых $f: X \to Y$ и $\bar{Y}$ замыкание в произведении $\mu_0 X \times \bar{Y}$ графика отображения f является наименьшим расширением пространства X, допускающим продолжение f относительно $\bar{Y}$. Это расширение H-замкнуто (соответственно отлично от X) тогда и только тогда, когда $U(f, \bar{Y}) = C_X$ (соответственно $U(f, \bar{Y}) \neq \varnothing$).*

Следствие. *Пусть X локально бикомпактно, а $\bar{Y}$ бикомпактно (тихоновское, регулярно). Тогда для любого $f: X \to Y$ наименьшее расширение пространства X, допускающее продолжение f относительно $\bar{Y}$, бикомпактно (тихоновское, регулярно).*

Теорема 3. *Для любого H-замкнутого расширения X' пространства X и для любого $\bar{Y}$ замыкание графика отображения $f: X \to Y$ в произведении $X' \times \bar{Y}$ является расширением пространства X, допускающим продолжение f относительно $\bar{Y}$. Это расширение H-замкнуто (соответственно отлично от X) тогда и только тогда, когда $U(f, \bar{Y}) = C_X$ (соответственно $U(f, \bar{Y}) \neq \varnothing$).*

Теорема 4. *Пусть $\bar{Y}$ — H-замкнутое расширение либо типа Катетова, либо типа Фомина пространства Y, и пусть существует H-замкнутое расширение $\bar{X}$, допускающее продолжение $f: X \to Y$ относительно $\bar{Y}$. Тогда для любого H-замкнутого расширения Y' пространства Y существует H-замкнутое расши-*

рение пространства X, *допускающее продолжение* f *относительно* Y'.

Следствие 1. *Пусть* $f: X \to Y$ *плотное отображение. Для того, чтобы при любом* H*-замкнутом расширении* Y' *пространства* Y *существовало расширение* X, *допускающее продолжение* f *относительно* Y', *необходимо, а если при некотором* H*-замкнутом* $\tilde{Y}$ *существует* H*-замкнутое* $\tilde{X}$, *допускающее продолжение* f *относительно* $\tilde{Y}$, *то и достаточно, чтобы из эквивалентности свободных открытых фильтров пространства* Y *следовала эквивалентность их прообразов* (⁷).

Следствие 2. *Пусть* Y — *тихоновское пространство такое, что существуют два его разных, но эквивалентных свободных открытых фильтра (например,* $\mathbf{R}^n$*), и пусть* X — *дискретное пространство, определенное на множестве точек* Y. *Тогда для любого бикомпактного* $\tilde{Y}$ *существует* H*-замкнутое расширение* $\tilde{X}$, *допускающее продолжение тождественного вложения* $i: X \to Y$ *относительно* $\tilde{Y}$, *поэтому расширение Катетова* kX *также допускает такое продолжение, тогда как не существует* H*-замкнутого расширения пространства* X, *допускающего продолжение* i *относительно* kY.

В работе (²) доказано, что $f: X \to Y$ допускает продолжение $\bar{f}: kX \to kY$ тогда и только тогда, когда оно является p-отображением и указан пример отображения, не являющегося p-отображением.

Таким образом, следствие 2 теоремы 4 также дает способ построения отображений, не являющихся p-отображениями. Одновременно оно показывает, что отображение $f: X \to Y$ может не допускать продолжения на kX относительно kY, т. е. не быть p-отображением, однако оно может допускать продолжение на kX относительно некоторого H-замкнутого $\tilde{Y}$. А это означает, что в случае произвольного H-замкнутого $\tilde{Y}$ теорема 4 не верна.

Укажем теперь способ построения пространств и их отображений, не допускающих продолжения ни на какое истинное расширение.

Пусть при некотором H-замкнутом $\tilde{Y}$ не существует H-замкнутого расширения $\tilde{X}$, допускающего продолжение отображения $f: X \to Y$ относительно $\tilde{Y}$, и пусть $U(f, \tilde{Y}) = \varnothing$. Тогда в силу предложений 1 и 2 расширение типа Катетова kX_U из $\hat{X}_{(U,D)}$, где $U = U(f, \tilde{Y})$, а D — разбиение U на одноэлементные подмножества, допускает продолжение $\bar{f}: kX_U \to \tilde{Y}$, для которого $U(\bar{f}, \tilde{Y})$ окажется пустым, поэтому в силу следствия предложения 1 $\bar{f}$ не может быть продолжено ни на какое истинное расширение не H-замкнутого пространства kX_U. Если же $U(f, \bar{Y}) = \varnothing$, то таким же свойством будет обладать уже композиция $i_Y \circ f : X \to \bar{Y}$.

Пусть теперь F—семейство отображений $f : X \to Y_f$, $\bar{Y}_f$—расширение пространства Y_f и $S = \{\bar{Y}_f : f \in F\}$.

Расширение $\bar{X}$ пространства X назовем расширением, допускающим продолжение семейства F относительно S, если при любом $f \in F$ $\bar{X}$ допускает продолжение f относительно $\bar{Y}_f$, при этом класс $\hat{X}_{[U.D]}$, содержащий $\bar{X}$, назовем классом продолжимости F относительно S.

Пусть $Y = \Pi\{Y_f : f \in F\}$, $\bar{Y} = \Pi\{\bar{Y}_f : f \in F\}$ и $\Delta_F : X \to Y$ диагональное отображение, порожденное F. Легко видеть, что $\bar{X}$ допускает продолжение F относительно S тогда и только тогда, когда оно допускает продолжение Δ_F относительно $\bar{Y}$. Поэтому приведенные утверждения, примененные к отображению Δ_F относительно расширений $\bar{X}$, $\bar{Y}$, дают соответствующие утверждения для F относительно $\bar{X}$ и S.

Укажем примеры таких утверждений.

H-замкнутое расширение $\bar{X}$, допускающее продолжение $\bar{F} = \{\bar{f} : \bar{X} \to \bar{Y}_f;\ f \in F\}$ семейства F относительно S, принадлежит наименьшему классу продолжимости F относительно S тогда и только тогда, когда семейство $\bar{F}$ различает точки нароста $\bar{X} \setminus X$.

Пусть X локально H-замкнуто. Тогда для любого семейства F отображений $f : X \to Y_f$ и любых $\bar{Y}_f$ замыкание в произведении $\mu_0 X \times \bar{Y}$ графика отображения Δ_F является наименьшим расширением X, допускающим продолжение F относительно S. Это расширение H-замкнуто (соответственно отлично от X) тогда и только тогда, когда $U(\Delta_F, \bar{Y}) = C_X$ (соответственно $U(\Delta_F, \bar{Y}) \neq \varnothing$).

Обозначим через $\mu^* X$ то из простых H-замкнутых расширений X, следы на X систем открытых окрестностей точек нароста которого являются полурегулярными ультрафильтрами X.

Предложение 3. *Пусть либо X локально H-замкнуто, либо полурегулярно, и пусть f—отображение X на Y, допускающее такое продолжение $\bar{f} : \mu^* X \to \mu^* Y$, которое нарост $\mu^* X \setminus X$ пе-*

реводит в нарост $\mu^*Y\setminus Y$. *Тогда* f *продолжается на* μX *относительно* μY.

Теорема 5. *Для сюръективного отображения* $f: X\to Y$, *где* Y не *H-замкнуто, следующие утверждения эквивалентны:*

(*i*) f *является p-отображением и не имеет пределов по свободным открытым ультрафильтрам пространства* X.

(*ii*) *Существует H-замкнутое расширение* $\bar{X}$, *допускающее продолжение* f *относительно некоторого H-замкнутого расширения типа Фомина* $\bar{Y}$, *которое нарост* $\bar{X}\setminus X$ *переводит в нарост* $\bar{Y}\setminus Y$.

(*iii*) f *допускает продолжение* $\bar{f}: kX\to kY$, *переводящее* $kX\setminus X$ *в* $kY\setminus Y$.

(IV) f *допускает продолжение* $\bar{f}: \sigma X\to\sigma Y$, *переводящее* $\sigma X\setminus X$ *в* $\sigma Y\setminus Y$.

Если же X, Y *к тому же локально H-замкнуты, то приведенные утверждения эквивалентны каждому из утверждений:*

(V) f *допускает продолжение* $\bar{f}: \sigma_0 X\to\sigma_0 Y$.

(VI) *Прообраз замкнутого множества, обладающего тем свойством, что замыкание его внутренности H-замкнуто, обладает тем же свойством.*

Следствие. *Если в условиях теоремы 5* Y *полурегулярно,* f *к тому же открытое и выполнено некоторое из* (*i*)—(IV), *то* μX *и* μ^*X *допускают продолжение* f *относительно* μY *и* μ^*Y *соответственно, и каждое из* (V)—(VI) *влечет продолжимость* f *на* $\mu_0 X$ *относительно* $\mu_0 Y$.

Теорема 6. *Пусть* X, Y *не H-замкнуты,* Y *полурегулярно и* f *отображение* X *на* Y *такое, что для любого открытого в* Y *множества* w $f^{-1}(\overline{w}) = \overline{f^{-1}(w)}$. *Тогда утверждения* (*i*)—(IV) *теоремы 5 эквивалентны каждому из следующих:*

(VII) f *допускает продолжение* $\bar{f}: \mu^*X\to\mu^*Y$, *переводящее* $\mu^*X\setminus X$ *в* $\mu^*Y\setminus Y$.

(VIII) f *допускает продолжение* $\bar{f}: \mu X\to\mu Y$, *переводящее* $\mu X\setminus X$ *в* $\mu Y\setminus Y$.

Если же X, Y *к тому же локально H-замкнуты, то все утверждения теоремы 5 эквивалентны также следующему:*

(IX) f *допускает продолжение* $\bar{f}: \mu_0 X\to\mu_0 Y$.

Предложение 4. *Пусть* Y *не H-замкнуто и* $g: Z\to Y$ *сюръективное p-отображение. Тогда существует расширение* X *пространства* Z, *являющееся подпространством* kZ *и допускающее продолжение* g *относительно* Y *такое, что для продолженного отображения* $f: X\to Y$ *уже выполнены утверждения* (*i*)—(IV) *теоремы 5. Если при этом Y к тому же регулярно, то X можно подобрать как подпространство расширения Фомина σZ.*

Предложение 5. *Пусть X, Y — локально H-замкнутые и не H-замкнутые пространства. Отображение f X на Y допускает продолжение $\bar f:\mu_0 X\to\mu_0 Y$ тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого подмножества H-замкнутого подпространства пространства Y является подмножеством некоторого H-замкнутого подпространства пространства X.*

Следствие. *Пусть X, Y — локально бикомпактные и небикомпактные пространства, f — отображение X на Y, $\bar Y$ бикомпактно и $\bar f:\beta X\to\bar Y$ продолжение отображения f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Прообраз бикомпактного множества при отображении f бикомпактен.

(ii) $\bar f(\beta X\setminus X)\subseteq\bar Y\setminus Y$.

(iii) f допускает продолжение $f_0:\beta_0 X\to\beta_0 Y$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Արտապատկերումների անընդհատ շարունակումը տարածությունների լայնացումների վրա

Դիցուք $\bar X$-ը և $\bar Y$-ը համապատասխանաբար X և Y տարածությունների հաուսդորֆյան լայնացումներ են։ Հոդվածում բերվում են մի քանի արդյունքներ, որոնք վերաբերվում են $f: X\to Y$ արտապատկերումը մինչև $\bar f:\bar X\to\bar Y$ անընդհատ արտապատկերման շարունակելու խնդրին։ Հատկապես, ուսումնասիրվում է արտապատկերումների շարունակելիությունը X-ի Ֆոմինյան լայնացման, μ տիպի ամենամեծ H-փակ լայնացման, Ֆոմինյան տիպի մեկ կետանոց H-փակ լայնացման, մեկ կետանոց բիկոմպակտիֆիկացիայի և այլ հայտնի լայնացումների վրա (Y-ի նույնատիպ լայնացումների դեպքում)։ Լոկալ H-փակ X-ի դեպքում ցույց է տրվում X-ի ամենափոքր լայնացումը, որի վրա տրված արտապատկերումը թույլ է տալիս անընդհատ շարունակություն։ Կառուցվում են հաուսդորֆյան տարածություններ և նրանց անընդհատ արտապատկերումներ, որոնք թույլ չեն տալիս անընդհատ շարունակություն և ոչ մի հաուսդորֆյան լայնացման վրա։

Դիտարկվում է նաև $f: X\to Y_f$ արտապատկերումների ընտանիքի X-ի միևնույն լայնացման վրա միաժամանակյա շարունակման խնդիրը, որը հոդվածում բերվում է այդ ընտանիքով ծնված անկյունագծային արտապատկերման շարունակման խնդրին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Herrlich, G. E. Strecker*, Math. Ann., B. 177, H. 4 (1968). [2] *D. Harris*, Math. Ann., B. 193, H. 3 (1971). [3] *M. Katetov*, Casopis Pest. Mat. Fys., vol. 69 (1940). [4] *Н. Бурбаки*, Общая топология, основные структуры, Наука, М., 1968. [5] *C. T. Liu*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 130 (1968). [6] *А. А. Иванов*, Записки научных семинаров ЛОМИ, Исследования по топологии, т. 36 (1973). [7] *С. Г. Овсепян*, УМН, т. 34, № 6 (1979).