ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 1

УДК 512.54

МАТЕМАТИКА

Г. С. Микаелян

Г-сопряженность силовских баз и холловских подгрупп в одном классе локально конечных групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/VI 1980)

1. В своей работе ([1]) Хартли показал, что вопрос сопряженности силовских p-подгрупп (p—простое число) локально конечных счетных групп связан с мощностью множества всех таких подгрупп данной группы. В этом плане интересен следующий результат Асара ([2]): в любой локально конечной p-редкой группе силовские p-подгруппы сопряжены (группа называется p-редкой (см. ([3])), если в каждой ее счетной подгруппе силовских p-подгрупп не более, чем счетно).

Обобщая результат Асара в работе ([3]), Хартли установил сопряженность силовских (максимальных) П-подгрупп в некоторых классах локально конечных П-редких групп (П—произвольное множество простых чисел).

В настоящей работе мы рассматриваем локально конечные группы, являющиеся p-редкими для всех $p \in \Pi$, и для таких групп устанавливаем некоторые признаки сопряженности силовских П-баз и холловских П-подгрупп. В отличие от традиции мы рассматриваем сопряженность соответствующих частей группы относительно некоторой группы, действующей на данную группу.

2. Предположим, что (G, Γ) групповая пара (см. ([4])), $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$, $\{B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$ —силовские П-базы (см. ([5])) группы G. Скажем, что данные базы Г-сопряжены, если для некоторого $\gamma \in \Gamma$ $A_i^\gamma = B_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Аналогично определяется Г-сопряженность холловских П-подгрупп.

Теорема 1. *Пусть* П *конечное множество простых чисел, а* G*—локально конечная* p*-редкая группа для всех* $p \in \Pi$. *Тогда, если* (G, Γ) *такая групповая пара, что* G *обладает локальной системой конечных подгрупп, в которых силовские* П*-базы (холловские* П*-подгруппы)* Г*-сопряжены, то силовские* П*-базы (соответственно—холловские* П*-подгруппы)* Г*-сопряжены и в самой группе* G.

Из обоих утверждений этой теоремы получается упомянутый результат Асара, если предполагать, что П составлено из одного элемента, локальной системой, фигурирующей в теореме, служит множество всех конечных подгрупп данной группы, а Г—некоторая группа внутренних автоморфизмов группы G, обладающая тем свойством, что для каждого внутреннего автоморфизма любой конечной подгруппы группы G, переводящего одну силовскую П-базу в другую, существует элемент из этой группы, являющейся продолжением указанного внутреннего автоморфизма.

Далее, из нее в частности следует, что в периодической локально разрешимой группе, являющейся p-редкой для всех $p \in П$ (П—конечное) сопряжены как силовские П-базы, так и холловские П-подгруппы.

Условие конечности, налагаемое в теореме на множество П, очевидно можно заменить на конечность простых делителей порядков элементов группы G, входящих в П. Нам не известно, существенно ли такое ограничение. В частности, нам не известен ответ на следующий

Вопрос 1. Пусть П произвольное множество простых чисел, G локально конечная p-редкая группа для всех $p \in П$. Тогда сопряжены ли силовские П-базы (холловские П-подгруппы) группы G, если такие базы (соответственно—подгруппы) сопряжены в ее конечных подгруппах?

3. В работе ([6]) Нейман приводил ряд теоретико-групповых свойств, обладающих счетным характером (свойство обладает счетным характером, если любая группа обладает этим свойством, если только им обладают все ее счетные подгруппы).

Оказывается, что свойство групп с одним классом сопряженных между собой силовских П-баз или холловских П-подгрупп также обладает счетным характером, правда, уже не в классе всех групп, а в классе локально конечных p-редких групп, $p \in П$. Точнее:

Теорема 2. *Если локально конечная группа G является p-редкой для всех $p \in П$ и $(G, Г)$ такая групповая пара, что в счетных подгруппах группы G силовские П-базы Г-сопряжены, то такие базы Г-сопряжены и в самой группе G.*

Теорема 3. *Если локально конечная группа G является p-редкой для всех $p \in П$, где П—конечное, и $(G, Г)$ такая групповая пара, что в счетных подгруппах группы G холловские П-подгруппы Г-сопряжены, то такие подгруппы Г-сопряжены и в самой группе G.*

Существенность условия конечности множества П в теореме 3 нам не удалось показать. В частности, мы не знаем ответ на следующий

Вопрос 2. Сопряжены ли холловские П-подгруппы локально конечной группы, являющейся p-редкой для всех $p \in П$, если такие подгруппы сопряжены в ее счетных подгруппах?

4. Аналог теоремы 1 для холловских Θ-баз (см. ([7])) остается верным, если только предполагать, что заданная группа является p-редкой для каждого p из любого $П \in \Theta$, а Θ—конечна, вместе со своими элементами.

Для силовских LQ-баз (см. [8]) аналогичное утверждение будет верным, если помимо конечности системы Q предполагать, что в данной группе конечные $\mathbf{X}$-подгруппы нильпотентны для всякого $\mathbf{X} \in Q$ Отсюда, в частности, беря $Q = \{O_{\Pi}\}$ и вместо Г—группу внутренних автоморфизмов данной группы, получаем положительное решение проблемы 1 из работы [9] для локально конечных групп, конечные П-подгруппы которых нильпотентны.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Գ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Սիլովյան բազաների և հոլյան ենթախմբերի Γ-համալուծությունը լոկալ վերջավոր խմբերի մի դասում

Աշխատանքում դիտարկվում են լոկալ վերջավոր խմբեր, որոնք p-հազվագյուտ են պարզ թվերի կամայական Π բազմությունից վերցրած բոլոր p-երի համար։ Ցույց է տրվում, որ նման խմբերում սիլովյան Π-բազաների և հոլյան Π-ենթախմբերի համալուծության վերաբերյալ տեղի ունի վերջավոր կամ հաշվելի բնույթի լոկալ թեորեմ՝ կախված Π-ի վերջավոր կամ հաշվելի լինելուց։ Քննարկվում է նաև դիտարկվող խմբերի սիլովյան LQ-բազաների և հոլյան Θ-ենթախմբերի համալուծությունը։ Բոլոր դեպքերում համալուծությունը ենթադրվում է տրված խմբի վրա գործող կամայական ավտոմորֆիզմների խմբի նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *B. Hartley*, Proc. London Math. Soc., vol. 3 № 23 (1971). [2] *A. Asar*, J. London Math. Soc., vol. 2, № 6 (1973). [3] *B. Hartley*, Compositio Math., vol. 25 (1972). [4] *Б. И. Плоткин*, Группы автоморфизмов алгебраических систем, «Наука», М., 1966. [5] *П. А. Гольберг*, Мат. сб., 32 (1953) [6] *B. Neamann*, в сб.: Избранные вопросы алгебры и логики. Сборник, посвященный памяти А. И. Мальцева, Новосибирск. 1973. [7] *П. А. Гольберг*, Сиб. мат. журн., № 1, 1960. [8] *Г. С. Микаелян*, Силовские LQ-базы бесконечных групп, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 6. № 5 (1971). [9] *B. Hartley*, Proc. Second internat. conf. theory of groups. 1973.