

УДК 512.2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Бабаджанян

## О сходимости общих процессов итеративного агрегирования

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/1 1979)

1. Метод итеративного агрегирования был предложен в <sup>(1)</sup> для решения систем линейных балансовых уравнений вида

$$x = Ax + y \quad (x \in R^n) \quad (1)$$

с заданными неотрицательными матрицей  $A$  и вектором  $y$ . Предполагается, что  $l_1$ -норма матрицы  $A$  удовлетворяет неравенству

$$\|A\| < 1. \quad (2)$$

В этом направлении отметим также работу <sup>(2)</sup>.

В работах <sup>(3-5)</sup>, посвященных обоснованию метода итеративного агрегирования, удалось получить доказательство сходимости в общем случае лишь при выполнении условия  $\|A\| < \frac{1}{3}$ . Кроме того, в <sup>(6,7)</sup>

исследована сходимость процесса, когда коэффициенты исходной системы (1) „почти“ удовлетворяют условиям Хатанака.

В настоящей работе предложен новый метод (процесс) итеративного агрегирования (названный специальным) для решения систем уравнений вида (1). Доказана его сходимость в случаях аналогичных <sup>(3-5)</sup>.

Предлагаются общие ( $l$ -кратные) процессы итеративного агрегирования, являющиеся обобщениями известного метода итеративного агрегирования <sup>(1)</sup> и отмеченного выше специального метода. Показана сходимость  $l$ -кратных процессов в случаях, известных для процесса итеративного агрегирования. Более того, для достаточно больших  $l$  сходимость имеет место и при условии (2).

2 Процесс итеративного агрегирования в общем случае можно выписать в следующей векторно-матричной форме <sup>(4,5,7)</sup> (здесь следуют обозначениям, принятым в <sup>(1)</sup>):

$$X^{(k+1)} = TAP_k X^{(k+1)} + Y, \quad Y = Ty, \quad (3)$$

$$x^{(k+1)} = AP_k x^{(k+1)} + y \quad (k=0, 1, \dots), \quad (4)$$

$$x^{(0)} \geq 0, \sum_{q \in N_j} x_q^{(0)} = 0, N_j = \{q \mid x_{q-1} < e < x_q\}, \quad (5)$$

где  $X^{(k+1)}$ ,  $Y$  —  $m$ -мерные вектор-столбцы;  $k$  — номер шага итерации.

Через  $T$  обозначена агрегирующая матрица размерности  $m \times n$

$$T = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 10 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 01 & \dots & 10 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 01 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

в  $j$ -ой строке и  $q$ -м столбце которой стоит единица, если  $q$ -я переменная системы (1) принадлежит  $j$ -й группе и нуль — в противном случае,  $j = 1 \dots m$ ,  $q = 1 \dots n$ . Без ограничения общности принято, что переменные перенумерованы в порядке их объединения.

Весовая матрица

$$P_k = \begin{vmatrix} p_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j_1}^{(k)} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & p_{j_1+1}^{(k)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & p_{j_2}^{(k)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & p_{j_2+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n^{(k)} \end{vmatrix} \quad (6)$$

получается из матрицы  $T^T$  заменой каждой единицы весом

$$p_q^{(k)} = \frac{x_q^{(k)}}{\sum_{q \in N_j} x_q^{(k)}} \quad q \in N_j \quad (j = 1, \dots, m). \quad (7)$$

Как видно из (4), решением уравнений (межпродуктового) баланса (1) на каждом шаге  $k = 0, 1, \dots$  принимается приближение  $x^{(k+1)}$ , найденное путем дезагрегации валового выпуска агрегированной системы уравнений (межотраслевого) баланса (3) (т. е. путем подстановки приближения  $P_k X^{(k+1)}$  в (1)).

Специальный процесс итеративного агрегирования в общем случае имеет следующий векторно-матричный вид:

$$Z^{(k+1)} = T A P_k Z^{(k+1)} + T A y, \quad (8)$$

$$x^{(k+1)} = P_k Z^{(k+1)} + y, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

$$A \cdot x^{(0)} \geq 0, \sum_{q \in N_j} \sum_{i=1}^n a_{iq} x_i^{(0)} \neq 0 \quad (10)$$

Матрица  $P_k$  имеет вид (6), однако веса находятся уже из соотношений:

$$p_q^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n a_{qi} x_i^{(k)}}{\sum_{q \in N_j} \sum_{i=1}^n a_{qi} x_i^{(k)}} \quad q \in N_j \quad (j=1, \dots, m). \quad (11)$$

Здесь уже приближение  $x^{(k-1)}$  находится путем дезагрегации потока затрат, найденного из уравнений межотраслевого баланса (8) (т. е. путем подстановки приближения  $P_k Z^{(k+1)}$  в (1)). Условие (11) означает, что в матрице коэффициентов прямых затрат межотраслевого баланса (8), на каждом шаге  $k=0, 1, \dots$  зафиксированы пропорции потока затрат продуктов внутри отрасли (в отличие от процесса (3)–(7), где фиксированы пропорции валового выпуска).

Замечание 1. В частном случае, если  $|A| \neq 0$ , то процесс (3)–(11) выводится из (3)–(7) и наоборот.

Теорема 1. При  $T = (1, \dots, 1)$  итерационный процесс (8)–(11) монотонно сходится (в  $l_1$ -норме) со скоростью геометрической прогрессии, если матрица  $A$  удовлетворяет условию (2).

Замечание 2. Скорость сходимости определяется вторым по модулю собственным значением стохастической матрицы  $S = [s_{qk}]$ :

$$s_{qk} = a_{qk} + \frac{\sum_{i=1}^n a_{qi} b_i}{\sum_{i=1}^n x_i b_i} (1 - x_k),$$

$$\text{где } x_k = \sum_{q=1}^n a_{qk}.$$

Теорема 2. Итерационный процесс (8)–(11), в общем случае агрегирующей матрицы  $T$ , монотонно сходится со скоростью геометрической прогрессии, если матрица  $A$  удовлетворяет условию

$$|A| < \frac{1}{3}.$$

3. Выписывая уравнение (1) в ином виде, а именно

$$x = y + Ay + \dots + A^l y + A^{l+1} x$$

и используя рассуждения п. 2, можно обобщить оба процесса итеративного агрегирования.

$l$ -кратный процесс итеративного агрегирования ( $A^{l+1}x = A(A^l x)$ ):

$$X^{(k+1)} = TAP_k X^{(k+1)} + TA^l y \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3')$$

$$x^{(k+1)} = AP_k x^{(k+1)} + A^l y + \dots + Ay + y, \quad (4')$$

где матрица  $P_k$  имеет вид (6), однако веса находятся из соотношений:

$$p_q^{(k)} = \frac{(A^l x^{(k)})_q}{\sum_{q \in N_j} (A^l x^{(k)})_q}, \quad q \in N_j, \quad (j = 1, \dots, m) \quad (7')$$

$l$  — кратный специальный процесс итеративного агрегирования:

$$Z^{(k+1)} = T A P_k Z^{(k+1)} + T A^{l+1} y \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (8')$$

$$x^{(k+1)} = P_k Z^{(k+1)} + A^l y + \dots + A y + y, \quad (9')$$

где

$$p_q^{(k)} = \frac{(A^{l+1} x^{(k)})_q}{\sum_{q \in N_j} (A^{l+1} x^{(k)})_q}, \quad q \in N_j, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (11')$$

В обоих процессах требуются очевидные условия, аналогичные (5) и (10).

Замечание 3. Теоремы 1, 2 и замечание 1 имеют место для  $l$  — кратных процессов.

Теорема 3. Для некоторого  $l_0$   $l$  — кратные итеративные процессы (3') — (7') и (8') — (11') в общем случае агрегирующей матрицы  $T$  монотонно сходятся со скоростью геометрической прогрессии и при условии (2).

Доказательство теоремы проводится аналогично (\*), откуда и следует неравенство  $\|A^{l+1}\| < 1/3$ .

4. Более полное изложение полученных результатов, а также сравнительный анализ предлагаемых методов излагаются автором в других работах.

Армянский научно-исследовательский  
институт энергетики

Ա. Ա. ԲԱՐՍԵՍՅԱՆ

Իտեղատիվ ազրեգացման բնդանուր պրոցեսների գուգամիտման մասին

Աղխատանրում ներկայացված է նոր (հատուկ) իտերատիվ ազրեգացման մեթոդ դծային բալանսային հափասարումների լուծման համար: Ապացուցված է նրա գուգամիտումը որոշ դեպքերում:

Բերվում է իտերատիվ ազրեգացման պրոցեսների բնդանրացումը  $l$  — պատիկ իտերատիվ ազրեգացման պրոցեսների:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Շ Ի Ն Ե Ր Ի Ն

- \* Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов, «Плановое хозяйство», № 5, 1965. \* J. C-H Fcl, Econometrica, v 12, №1 (1956). \* Б. А. Щенников, Экономика и матем. методы, т. I, вып. 6 (1965). \* Б. А. Щенников, ДАН СССР, т. 173, № 1 (1967). \* Л. А. Хмидер, Сб. «Исследования по математической экономике и смежным вопросам», вып. 21, МГУ (1972). \* М. В. Калинин, Сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 21, МГУ (1973). \* В. А. Хомяков, «Автоматика и телемеханика», № 7, 1973. \* Л. М. Дудкин, Система расчетов оптимального народнохозяйственного плана, «Экономика», М., 1972.