ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 5

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

Ю. Г. Дадаян, Л. А. Оганесян

Покоординатное сгущение сетки при решении задачи дифракции в областях с углами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 11/VII 1980)

1. Пусть $\Omega(x, y)$ ограниченная односвязная область в пространстве R_2 с границей S, состоящей из конечного числа дуг класса C^2, встречающихся под ненулевыми углами. Предполагается, что внутри Ω имеются гладкие дуги $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{N_1}$, которые пересекаются между собой и с S только в своих концах, причем под ненулевыми углами, и разбивают Ω на подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$. Назовем точки пересечения $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{N_1}$ и S фокусами $P_1, P_2, \ldots, P_N$, а линии $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{N_1}$ линиями разрыва.

Решение задачи дифракции определим как функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$L(u, \Phi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d\Omega + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au \right) \Phi d\Omega +$$

$$+ \int_S \sigma u \Phi \, dS = \int_\Omega f \Phi \, d\Omega = (f, \Phi), \tag{1}$$

где $\Phi \in W_2^1(\Omega)$*, а $a_{ij} \in A^2(\Omega_m)$ в каждой Ω_m, $m = \overline{1, M}$, т. е. a_{ij} могут терпеть конечные разрывы на Γ_n, $n = \overline{1, N_1}$, $b_i \in C^1(\Omega)$, $a \in C(\Omega)$, $f \in \in L_2(\Omega)$, $\sigma \in C^1(S)$, причем $\sigma > 0$, $a \geqslant 0$.

Пусть

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \mu_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad \mu_0 = \text{const} > 0,$$

---

* В работе приняты следующие обозначения: $W_2^k(\Omega)$ — пространства Соболева; $C^k(\Omega)$ пространства k раз непрерывно дифференцируемых функций; $A^k(\Omega)$ — класс функций из $C^{k-1}(\Omega)$, имеющих k-ые ограниченные производные. $B_2^1(\Omega)$ — подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, принадлежащих $W_2^2(\Omega_m)$, $m = \overline{1, M}$. C — различные постоянные в оценках, переменные x и y будем обозначать также x_1, x_2.

и

$$L(u, u) \geq C\|u\|_{1,\Omega}, \quad u \in W_2^1(\Omega).$$

Перечисленные условия гарантируют существование $u \in W_2^1(\Omega)$ ([1]).

2. Координатную ось $0x$ (соответственно $0y$) и параллельные ей прямые будем называть горизонтальными (вертикальными) прямыми.

Пусть (x^k, y^k) координаты фокуса P_k, $k=\overline{1, K}$. Обозначим через X множество $\{x^k\}$, через $Y - \{y^k\}$.

$$d_x = \min_{x^k, x^e \in X, x^k \neq x^e} |x^k - x^e|, \quad d_y = \min_{y^k, y^e \in Y, y^k \neq y^e} |y^k - y^e|.$$

Обозначим через d_1 расстояние от границы S до ближайшей, не лежащей на S, точки (x^k, y^e), где $k, e=\overline{1, K}$, $x^k \in X$, $y^e \in Y$. Пусть $d = \frac{1}{3}\min(d_x, d_y, d_1)$.

Построим сетку с покоординатным сгущением к фокусам: пусть $h>0$ — достаточно малый параметр, отметим на оси $0x$ точки $x_l = lh$ ($-\infty < l < +\infty$ — целое), не принадлежащие множествам $x^k - d \leq x \leq x^k + d$, $k=\overline{1, K}$, и точки $x_j^k = x^k \pm (jh)^{1/\mu}$, $j=\overline{0, N-1}$, $k=\overline{1, K}$, где $0<\mu<1$, N — целая часть $d^\mu h^{-1}$. Через отмеченные точки проведем вертикальные прямые. Множество точек (x, y), лежащих соседними вертикальными прямыми, проходящими через абсциссы x' и x'', назовем вертикальным слоем (x', x''). Заметим, что $|x'-x''| < \varkappa h$, где $\varkappa(\mu) > 0$ — некоторое целое, не зависящее от h. То же самое сделаем с осью $0y$, проведем горизонтальные прямые и определим горизонтальные слои. Обозначим через $\square_k$ квадрат $|x-x^k| \leq d$, $|y-y^k| \leq d$.

После этого плоскость (x, y) будет разбита вертикальными и горизонтальными линиями на прямоугольники, которые назовем ячейками сетки, их вершины — регулярной сеткой Z_p. Каждую ячейку разделим диагональю, образующей острый угол с осью $0x$, на два треугольника. Наименьшее объединение треугольников с откинутой границей, содержащее Ω, назовем сеточной областью Ω^h_{ex}, а объединение всех треугольников с откинутой границей, лежащих в Ω, назовем сеточной областью Ω^h_{in}.

Пусть для фокуса (x^k, y^k) через z^k обозначено наименьшее число вида $(lh)^{1/\mu}$ (здесь $l=\overline{0, N-1}$) такое, что линии разрыва Γ_k, выходящие из (x^k, y^k), пересекают прямые $x = x^k \pm z^k$ и $y = y^k \pm z^k$ в точках, находящихся в разных слоях, причем если эти точки лежат в соседних слоях, то расстояние между ними больше ширины каждого из этих слоев. Пусть $\Pi_k \equiv [x^k - z^k, x^k + z^k; y^k - z^k, y^k + z^k]$,

$$D_1 = \Omega^h_{ex} \cap \bigcup_{k=1}^{K} \Pi_k, \quad D_2 = \Omega^h_{ex} \setminus D_1.$$

Чтобы получить триангуляцию, где стороны треугольников идут вдоль линии разрыва, аналогично ([2]) определим подвижные и неподвижные вершины для $\overline{D}_1$ и сделаем геометрические преобразования, похожие на преобразования а) — г) из [2], после чего плоскость (x, y) будет разбита на новые нерегулярные треугольники. Все вершины из D_1 считаем неподвижными.

Совокупность вершин и сторон треугольников новой триангуляции образует сетку, вершины треугольников назовем узлами сетки, а их совокупность обозначим через Z_H. Из [2] следует, что отображение $\varkappa(z_p) = Z_H$ является взаимно-однозначным. Будем считать, что все узлы сетки перенумерованы в некотором порядке. Обозначим через R^h множество узлов, принадлежащих $\overline{\Omega^h_{in}}$, а через r^h — множество узлов, принадлежащих ω^h, где $\omega^h = \Omega^h_{ex} \setminus \overline{\Omega}^h_{in}$.

Пусть на R^h задана сеточная функция $\underline{\varphi}$. Построим ее кусочно-линейное восполнение $\overline{\varphi}(x, y)$ в Ω^h_{ex}, используя экстраполяцию из Ω^h_{in} в Ω^h_{ex} подобно [3]: в Ω^h_{in} вектору $\underline{\varphi}$ сопоставим $\tilde{\varphi}(x, y)$ — обычное кусочно-линейное восполнение, т. е. $\overline{\varphi}(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y)$ в Ω^h_{in}. Если $(x_m, y_m) \in r^h$, то сопоставим узлу (x_m, y_m) какой-либо треугольник из $\overline{\Omega}^h_{in}$, который находится в наименьшей окрестности узла (x_m, y_m). Значение функции $\overline{\varphi}$ в узле (x_m, y_m) берем равным значению в (x_m, y_m) той линейной функции, которая в соответствующем треугольнике совпадает с $\tilde{\varphi}(x, y)$. Множество таким образом построенных функций $\overline{\varphi}(x, y)$ образует в $W^1_2(\Omega^h_{ex})$ конечномерное подпространство. Обозначим его через H^h. Ясно, что размерность H^h совпадает с количеством узлов в R^h.

3. **Построение вариационно-разностных схем (ВРС).** Приближенным решением задачи (1) назовем функцию $\overline{v}(x, y) \in H^h$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$L(\overline{v}, \overline{\varphi}) = (f, \overline{\varphi})$$

при произвольной $\overline{\varphi} \in H^h$.

В [4] было показано, что решение задачи (1) можно представить в виде

$$u(x, y) = w(x, y) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{e=1}^{l_k} \gamma_{ke} \psi_{ke}(x, y), \quad \gamma_{ke} = \text{const}.$$

Здесь $\psi_{ke}(x, y)$, $e = \overline{1, l_k}$, особые функции $\psi_{ke} \in W^1_2(\Omega)$, $\psi_{ke} \overline{\in} W^2_2(\Omega)$, связанные с фокусом P_k. Они непрерывны, обращаются в нуль вне $\square_k$, гладки в каждой Ω_m, $m = \overline{1, M}$ везде, кроме точек (x^k, y^k), и для каждой области $\Omega'_m = \Omega_m \cap \square_k$ за счет поворота системы координат $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ можно добиться, чтобы $\psi = r^{\mu_{ke}} \Phi_{ke}(\theta) + v(\xi, \eta)$, где (r, θ) полярные координаты в плоскости (ξ, η), а v имеет вторые производные и $|v| < C r^{\mu_{ke}+1}$ в Ω'_m. Здесь $0 < \mu_{ke} < 1$, $\Phi_{ke}(\theta)$ — гладкая функция от θ.

В ([4]) было также показано, что $w \in B_2^2(\Omega)$ и выполнено неравенство

$$\|w\|_{B_2^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L_k} |\gamma_{kl}| \leq C \|f\|_{0,\Omega}.$$

Справедлива следующая, доказываемая почти как в ([3]).

Теорема 1. *Пусть u есть обобщенное решение задачи* (1), *а $\bar{v}$—приближенное. Тогда при достаточно малых h имеют место оценки*

$$\|u-\bar{v}\|_{i,\Omega} \leq C h^{2-i} \|f\|_{0,\Omega}, \quad i=0,\ 1.$$

4. Произвольной функции $\bar{\psi}$ из H^h соответствует сеточная функция $\underline{\psi}$, определенная на R^h. Сеточную функцию $\underline{\psi}$ можно рассматривать как элемент конечномерного евклидова пространства E^h. Обозначим через $t(h)$ количество узлов R^h. Заметим, что размерность E^h равна $t(h)$. Матрица системы сеточных уравнений для нахождения $\bar{v}$, которую обозначим через L, определяется равенством

$$\mathbf{L}(\bar{\varphi},\ \bar{\psi}) = \langle \underline{\varphi},\ \underline{\psi} \rangle,$$

где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ —скалярное произведение в E^h, $\underline{\varphi}$, $\underline{\psi}$ —произвольные векторы из E^h. Систему сеточных уравнений для нахождения $\underline{v}$ запишем в виде

$$L\underline{v} = \underline{g}, \tag{2}$$

где $\underline{g}$—вектор, определяемый из равенства

$$(f,\ \bar{\varphi}) = \langle \underline{g},\ \underline{\varphi} \rangle.$$

Будем считать, что область Ω заключена в квадрат Q со сторонами, находящимися на построенных нами линиях сетки, и расстояние от границы ∂Q до S не менее $3d>0$. Ясно, что $\Omega^h_{ex} \subset Q$. Обозначим через $\dot{E}^h$ конечномерное евклидово пространство сеточных функций $\underline{\psi}$, заданных во внутренних узлах Q, а через ψ кусочно-линейное восполнение $\underline{\psi} \in \dot{E}^h$. Отметим, что $\psi/_{\partial Q} = 0$.

Условимся упорядочивать координаты вектора $\underline{\psi}$ следующим образом:

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \underline{\psi}_1 \\ \underline{\psi}_2 \end{pmatrix},$$

где $\underline{\psi}_1 \in E^h$, а $\underline{\psi}_2$— остальные. Обозначим через $T(h)$ размерность $\dot{E}^h$. Кроме того, скалярное произведение в $\dot{E}^h$ будем обозначать через $\langle \cdot,\cdot \rangle_0$. Введем сеточный оператор B. В каждом внутреннем узле прямоугольника Q зададим B равенством $B\check{\varphi} = D_x^2\check{\varphi} + D_y^2\check{\varphi}$, где $\check{\varphi}$ сеточная функция на Z_p, со значениями, равными значениям соответствующих компонент $\underline{\varphi}$, здесь $D^2_{x}\overset{\vee}{\varphi}$ и $D^2_{y}\overset{\vee}{\varphi}$ вторые разделенные разности. Обозначим через R квадратную матрицу порядка $T(h)$, являющуюся „продолжением" L:

$$R = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вектор $\underline{w} = \begin{pmatrix} v \\ \hline \underline{w}_2 \end{pmatrix}$, где $\underline{w}_2$ — произвольно, а $\underline{v}$ — решение (2), удовлетворяет уравнению

$$B\underline{w} \equiv \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \hline \underline{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \underline{q}.$$

Для нахождения решения $\underline{w}$ рассмотрим итерационный процесс

$$B(\underline{w}^{n+1} - \underline{w}^n) = -\tau(R\underline{w}^n - \underline{q}), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \tau > 0. \tag{3}$$

На каждом шаге итерационного процесса (3) необходимо решать системы вида

$$B\underline{w} = \underline{G}. \tag{4}$$

Заметим, что матрица B представляет собой вариационно-разностную аппроксимацию задачи Дирихле для оператора Лапласа в прямоугольнике на прямоугольной неравномерной сетке. Поэтому для решения систем вида (4) применим метод переменных направлений с оптимальным выбором параметров ([5]).

В этом случае, несмотря на то, что сетка существенно неравномерна, объем вычислительной работы на решение системы (4) имеет порядок $O(T(h)\ln(T(h)))$.

Естественно оценивать скорость сходимости процесса в полунорме

$$\|\underline{\varphi}\|_R^2 = \langle R\underline{\varphi}, \underline{\varphi}\rangle_0 = (L\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1) = L(\varphi, \varphi).$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Ненулевые собственные числа задачи $R\underline{\psi} = \lambda B\underline{\psi}$ удовлетворяют неравенству*

$$0 < \gamma_1 \leqslant \lambda_k < \gamma_2,$$

где γ_1 и γ_2 не зависят от h. Тем самым скорость сходимости процесса (3) *при $\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ характеризуется неравенством*

$$\|\underline{w} - \underline{w}^n\|_R < \delta^n \|\underline{w} - \underline{w}^0\|_R,$$

где $\delta = (\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_2 + \gamma_1)$.

Это означает, что для уменьшения погрешности начального приближения в ε^{-1} раз достаточно, чтобы число итераций n удовлетворило условию $n > C\ln\varepsilon^{-1}$.

Доказательство этой теоремы в основном совпадает с доказательством аналогичной теоремы в ([1]). Однако, так как сетка неравномерна, требуется указать конструкцию продолжения вектора $\bar{\varphi}_1 \in$ $\in E^h$ на пространство E^h с сохранением нормы

$$\|\hat{\varphi}\|_{h,Q} \leq C \|\bar{\varphi}\|_{h,\Omega} \tag{5}$$

Эта конструкция является основной в настоящей работе.

а) Рассмотрим сначала такое продолжение заданной в Ω функции $\bar{\varphi}$, которое равно нулю вне некоторого достаточно малого прямоугольника Π с центром в точке $A \in S$ и со сторонами длиной 2α и 2β, параллельными осям координат. Перенесем начало координат в точку A (обозначим переменные в этой системе через те же x и y). Предположим вначале, что одна из полуосей, например, полуось $y>0$, лежит вне Ω и не касается $\partial\Omega$.

Пусть A есть фокус P, кривая $\partial\Omega$ в окрестности $x=0$, $y=0$ при $x \geq 0$ имеет вид $Y(x) = ax + O(x^2)$, а при $x<0$ — $Y(x) = a_1 x + O(x^2)$; кроме того $\max|Y(x)| < \beta/2$.

Рассмотрим узел (x_i, y_j), лежащий вне $\Omega \cap \Pi$. Если этот узел принадлежит Ω^h_{ex}, то положим в нем $\varphi'(x_i, y_j) = \bar{\varphi}(x_i, y_j)$. Если $(x_i, y_j) \in \Pi \setminus \Omega^h_{ex}$, то положим $\varphi'(x_i, y_j) = \bar{\varphi}(x_i, 2Y(x_i) - y_j)$, т. е. в точку (x_i, y_j) переносится значение кусочно-линейной функции $\bar{\varphi}$, взятой в точке, удаленной от S вдоль оси Oy внутрь области на такое же расстояние, на какое удалена от S точка (x_i, y_j). Для $(x_i, y_j) \bar{\in}$ $\bar{\in} \Omega^h_{ex} \cup \Pi$ положим $\varphi'(x_i, y_j) = 0$.

Положим продолжение φ^* равным восполнению сеточной функции $\varphi'(x_i, y_j)\ \Xi(y)$, где $\Xi(y)$ гладкая функция, равная единице в $\Omega \cap \Pi$ и $\Xi(\beta) = 0$.

б) Случай, когда вне области нет полуоси, не касающейся S, сводится к предыдущему поворотом осей координат так, чтобы положительная полуось Oy совпала с биссектрисой внешнего угла области, а продолжать надо функцию в прямоугольник со стороной, параллельной этой биссектрисе. Во всех случаях доказывается, что

$$\|\hat{\varphi}^*\|_{h,Q} \leq C \|\bar{\varphi}\|_{h,\Omega}.$$

Пусть теперь $\bar{\varphi}$ произвольная функция в Ω. Покроем область Ω прямоугольниками Π_i, $i = \overline{1, \sigma_1}$ (при этом все угловые точки являются центрами) и прямоугольниками Π'_j, $j = \overline{1, \sigma_2}$ с центрами в Ω^h_{in}, такими, что $\bigcup\limits_{j=1}^{\sigma_2} \Pi_j \subset \Omega^h_{in}$. Пусть $\sigma' = \sigma_1 + \sigma_2$.

Напишем разложение единицы в Ω

$$1 = \sum_{i=1}^{\sigma'} \zeta_i(x, y), \quad \zeta_i(x, y) \in C^\infty.$$

Тогда

$$\bar{\varphi}(x, y) = \sum_{i=1}^{\sigma'} \overline{\zeta_i(x, y)\bar{\varphi}(x, y)} = \sum_{i=1}^{\sigma'} \bar{\varphi}_i(x, y).$$

Для тех прямоугольников Π_i, центры которых лежат на границе области, продолжим соответствующие функции $\bar{\varphi}_i(x, y)$, как это описано выше. Получим функции $\hat{\varphi}_i^*$. Для прямоугольников, центры которых лежат внутри области, полагаем, что продолженная функция $\hat{\varphi}_i^*$ совпадает с соответствующей функцией $\bar{\varphi}_i$.

Положим $\hat{\varphi}^* = \sum_{i=1}^{N} \hat{\varphi}_i^*$, тогда $\hat{\varphi}^*$ совпадает в Ω с $\bar{\varphi}$ и

$$|\hat{\varphi}^*|_{1,\Omega} \leqslant \sum_{i=1}^{N} |\hat{\varphi}_i^*|_{1,\Omega} \leqslant C \sum_{i=1}^{N} |\bar{\varphi}_i|_{1,\Omega\cap\Pi_i} \leqslant C|\bar{\varphi}|_{1,\Omega}.$$

Тем самым имеет место неравенство (5).

Ереванский государственный университет
Институт социально-экономических проблем
Академии наук СССР

ՅՈՒ. Դ. ԴԱԴԱՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Անկյունային կետեր ունեցող տիրույթներում ըստ կոորդինատների ցանցի խտացումը, դիֆրակցիայի խնդրի լուծման ժամանակ

Աշխատանքում կառուցվում է այնպիսի անհավասարաչափ ցանց, որն ունի խտացումներ հատուկ կետերի շրջակայքերում։ Երրորդ եզրային խնդրի համար գրվում է վարիացիոն-տարբերական սխեմա։ Ցույց է տրվում, որ համապատասխան գծային հավասարումների սիստեմը կարելի է լուծել գրեթե օպտիմալ թվով թվաբանական գործողությունների միջոցով, օգտվելով ֆիկտիվ տիրույթների մեթոդից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Наука, М., 1964. [2] *Ю. Г. Дадаян.* Ученые зап. ЕГУ, № 2 (141), 1979. [3] *Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1979. [4] *Ю. Г. Дадаян, Л. А. Оганесян.* Ученые зап. ЕГУ, № 2 (144), 1980. [5] *А. А. Самарский, Е. С. Николаев.* Методы решения сеточных уравнений. Наука, М., 1978.