ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. А. Бабец

Соотношение дефектов Неванлинны для голоморфных отображений в замкнутые множества

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 2/VII 1980)

1. Пусть $X \subset_{\succ} W$ —замкнутое подмножество компактного комплексного многообразия W, $L \to W$ —положительное линейное расслоение. Каждый дивизор $D \in |L|$ определяется некоторым голоморфным сечением расслоения L, и в этом смысле говорят о линейной независимости таких дивизоров. Пусть $l \subset H^0(L, W)$ —линейное подпространство размерности k. Будем говорить, что дивизоры $\{D_j\}_{j=1}^q \in |l|$ независимы на X, если любые k дивизоров этой системы линейно-независимы на X. Условимся считать, что система $\{D_j\}_{j=1}^q$ имеет не более, чем m-кратное самопересечение на X, если для любого $p \in X$ существует самое большее m различных D_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ таких, что $p \in D_j$.

Дефект Неванлинны $\delta(D)$ может быть определен для любого дивизора $D \in |L|$ ([1]). При этом $0 \leqslant \delta(D) \leqslant 1$ и $\delta(D) = 1$, если $f(\mathbf{C}^m)$ не пересекает D.

Теорема 1. 1. *Пусть $X \subset_{\succ} W$, L—такие, как прежде, $f: \mathbf{C}^m \to X$ —голоморфное отображение, $l \subset H^0(L, W)$ —векторное подпространство размерности $k > 1$ и пусть $\{D_j\}_{j=1}^q \in |l|$ —независимые дивизоры на X, имеющие не более чем $k-1$ кратное самопересечение на X. Тогда либо*

$$\sum_{j=1}^q \delta(D_j) \leqslant \dim l$$

либо f вырождено относительно l, т. е. существует дивизор $D \in |l|$, для которого

$$f(\mathbf{C}^m) \subset D.$$

Соответствующие теоремы Пикара можно доказывать и другим способом (без использования леммы о логарифмической производной). На этом пути мы приходим к так называемому дифференциально-геометрическому методу в теории гиперболических многообразий.

2. О дифференциально-геометрическом методе в теории гиперболических многообразий.

2.1. Пусть $D^k=\{(z_1, \ldots, z_k)\in \mathbf{C}^k : |z_j|<1\}$. На этом полидиске определена форма объема Пуанкаре $\mu^k = k! \prod_{j=1}^{k} 4\sqrt{-1}\, dz_j \wedge d\bar{z}_j/(1-|z_j|^2)^2$.

Если X — комплексное многообразие, то внутренняя k-форма F_X^k $(1\leqslant k\leqslant \dim X)$ на X определяется равенством (см. [2])

$$F_X^k(p, \lambda)=\inf_f \{\|\lambda'\|,\ \lambda'\in\bigwedge^k T(D^k) \text{ и } f_*(\lambda')=\lambda\},\ \lambda\in P(\bigwedge^k T_p(X)),$$

где $P(\bigwedge^k T_p(X))$ означает множество разложимых векторов пространства $\bigwedge^k T_p(X)$, $\|\lambda'\|$ — длина вектора λ' по норме μ^k, а инфимум берется по всем $f\in \mathrm{Hol}(D^k, X)$ и $\lambda'\in\bigwedge^k T(D^k)$ таким, что $f_*(\lambda')=\lambda$.

Если $p, q\in X$, а $\gamma: [0, 1]\to X$ — соединяющая их кусочно-гладкая кривая, то интеграл $l(\gamma)=\int_0^1 F_X^1(\gamma(t), \gamma'(t)^{(1,0)})dt$ существует и определяет псевдорасстояние Кобаяси $\rho(p, q)$ как инфимум $l(\gamma)$ по всем таким кривым. Многообразие X называется гиперболическим, если $\rho(p, q)$ есть расстояние (см. [3,4]).

Интерес к таким многообразиям в большой степени мотивирован теоремами пикаровского типа.

Теорема Пикара. *Пусть X — комплексное многообразие, $F_X^k>0$ и $f: \mathbf{C}^m\to X$ — голоморфное отображение. Тогда ранг $(f)<k$.*

Если эта теорема доказывается просто, то выяснить в каждой конкретной ситуации, является ли данное многообразие гиперболическим, как правило, весьма затруднительно. Так, например, даже в случае проективного пространства $\mathbf{CP}_n$ без $2n+1$ гиперплоскости общего положения (г. о. п.) этот вопрос некоторое время оставался открытым (ср. [4], стр. 396). Эта ситуация типична, и она естественно приводит к одному из основных вопросов теории гиперболических многообразий:

Пусть W — компактное комплексное многообразие, D — дивизор на W с нормальным пересечением. Каким должен быть дивизор D, чтобы $W-D$ было гиперболичным?

2.2. Оказывается, что этот вопрос можно свести к дифференциальной геометрии некоторых расслоений, а именно: расслоений $T^*(\log D)$, ассоциированных с пучком ростков D-логарифмически мероморфных форм (см. [2]).

Для голоморфного векторного расслоения $E\to W$ ранга $r\geqslant 1$ запись $E<0$ означает, что это расслоение отрицательно в смысле Ниренберга и Спенсера (см. например [5]).

Теорема 2.1. *Пусть W — компактное комплексное многообразие, D — дивизор с простым нормальным пересечением. Если $\bigwedge^k T(\log D)<0$, то $F_{W-D}^k>0$.*

При $k=\dim W$ это совпадает с результатом Карлсона и Гриффитса [6].

Теорема. *Пусть W и D такие, как в теореме 2.1, $n = \dim W$. Если $c_1(|D|) + c_1(K_W) > 0$, то $F^n_{W \setminus D} > 0$.*

Соответствующая теорема Пикара формулируется следующим образом.

Теорема 2.2. *Пусть W, D — такие, как в теореме 2.1. Если $f: \mathbf{C}^m \to W \setminus D$ — голоморфное отображение и $\bigwedge^k T(\log D) < 0$, то ранг $(f) < k$.*

2.3. Общая схема, развитая в п. п. 2.2, позволяет доказать следующий результат.

Теорема 2.3. *На проективном пространстве $\mathbf{CP}_n$ без $2n+1$ гиперплоскости общего положения существует псевдоформа с отрицательной кривизной вдоль одномерных голоморфных направлений.*

Замечание. В такой постановке задачу можно найти у Кобаяси ([4], стр. 403). На $\mathbf{CP}_n \setminus \{2^n+1$ г. о. п.$\}$ псевдоформа с отрицательной кривизной построена Кавэном ([?]).

Опишем это подробнее. Пусть D — круг единичного радиуса в комплексной плоскости, $f: D \to \mathbf{CP}_n$ — голоморфное отображение, $\{H_j\}_{j=1}^{2n+1}$ — гиперплоскости общего положения на $\mathbf{CP}_n$. Логарифмическую производную кривой f обозначим через $\Lambda_1(f) = \Lambda_1: D \to T\left(\log \sum_{j=1}^{2n+1} H_j\right)$ (см. [2]). Ковариантную производную кривой Λ_1 в расслоении $T\left(\log \sum_{j=1}^{2n+1} H_j\right)$ относительно $\sum_{j=1}^{2n+1} H_j$ — логарифмически мероморфной связности обозначим через $D\Lambda_1$.

Положим $D^k\Lambda_1 = D(D^{k-1}\Lambda_1)$;

$$\Lambda_k = \Lambda_1 \wedge \ldots \wedge D^{k-1}\Lambda_1;$$

$$\Lambda_k : D \to \bigwedge^k T\left(\log \sum_{j=1}^{2n+1} H_j\right).$$

Псевдоформа, о которой говорится в теореме 2.3, имеет следующий вид ($n=3$):

$$h_f(\zeta) = \prod_{j=1}^{2n+1} (\log|s_j|^2)^{-2} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{q} <\Lambda_1, \Lambda_1>_j\right)^{1/q} + \right.$$

$$+ \left(\prod_{j=1}^{p} <\Lambda_2, \Lambda_2>_j\right)^{1/4p} \left(\prod_{j=1}^{p} <\Lambda_1, \Lambda_1>_j\right)^{1/4p} +$$

$$\left. + <\Lambda_3, \Lambda_3>^{1/16} \left(\prod_{j=1}^{s} <\Lambda_2, \Lambda_2>_j\right)^{1/16s} \left(\prod_{j=1}^{t} <\Lambda_1, \Lambda_1>_j\right)^{7/16t} \right\},$$

где $<,>_j$ — некоторые эрмитовые метрики, $|s_j|$ — норма сечения s_j расслоения гиперплоского сечения $H \to \mathbf{CP}_n$ ($s_j(p) = 0 \Leftrightarrow p \in H_j$). Условие на кривизну означает, что для всех $f \in Hol(D, \mathbf{CP}_n)$

$$dd^c \log h_f(\zeta) \geqslant c h_f(\zeta)$$

константа $c > 0$ не зависит от f.

В качестве первого следствия получается аналог теоремы Шоттки — Ландау ([9]) (ср. ([9,10])).

Следствие 1. *Пусть $D_r=\{z\in\mathbf{C}:|z|<r\}$, $f: D_r\to\mathbf{CP}_n\setminus\{2n+1$ г. о. п.$\}$ — голоморфное отображение. Тогда r оценивается сверху в терминах $f(0)$ и $f'(0)$*

$$r\leq F(f(0),\ f'(0)).$$

Следствие 2. *Проективное пространство $\mathbf{CP}_n$ без $2n+1$ гиперплоскости общего положения — гиперболическое многообразие.*

Харьковский государственный
университет

Վ. Ա. ԲԱԲԵՑ

Նևանլիննայի տեսությունը փակ բազմություններում հոլոմորֆ կորերի համար

Աշխատանքում ստացված է Նևանլիննայի դեֆեկտների անհավասարության անալոգը փակ բազմությունում արժեքներ ընդունող $f:\mathbf{C}^m\to X$ հոլոմորֆ արտապատկերումների համար։

Թեորեմ. Դիցուք $X\subset W$ կոմպակտ կոմպլեքս բազմաձևության փակ ենթաբազմություն է, $L\to W$ դրական գծային շերտավորում է, $f:\mathbf{C}^m\to X$ հոլոմորֆ արտապատկերում է, $l\subset H_0(L,\ W)$, k (>1) չափանի վեկտորական ենթատարածություն է և եթե $\{D_j\}_{j=1}^{q}\in|l|$ X-ի վրա ոչ ավել քան $k-1$ պատիկ ինքնահատում ունեցող անկախ դիվիզորներ են, ապա կամ

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(D_j)\leq k$$

կամ f-ը l-ի նկատմամբ վերասերված է, այսինքն գոյություն ունի դիվիզոր $D\in|l|$, որի համար $f(\mathbf{C}^m)\subset D$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *P. A. Griffiths, J. King*, Acta Math., vol. 130 (1973). [2] *В. А. Бабец*, Дифференциально-геометрический критерий гиперболичности. Деп 2596—79, 1979 [3] *С. Кобаяси*, Гиперболические многообразия и голоморфные отображения, Математика, т. 17, № 1 (1973) [4] *S. Kobayashi*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 82, № 3 (1976) [5] *P. A. Griffiths*, J. Math and Mech., vol. 14, № 1, (1965). [6] *J. Carlson, P. A. Griffiths*, Ann. of Math., vol. 95 (1972). [7] *M. J. Cowen*, The Kobayashi metric on $P_n-(2^n+1)$ hyperplanes, Value Distribution Theory, part A, Dehher, New York, 1974 [8] *У. К. Хейман*, Мероморфные функции, Мир, М., 1966 [9] *H. Cartan*, Ann. Ecole Normale, vol. 45 (1928). [10] *J. Dufresnoy*, Ann. Ecole Normale vol. 61 (1944)