ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

Суммирование по Абелю подсистем тригонометрической системы в пространствах $L^p(d\mu)$, $1<p<\infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/VI 1980)

В 1961 г. М. Розенблюм [1] рассмотрел задачу об описании положительных борелевских мер μ таких, что

$$\sup_{0<r<1}\left\|\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-t)f(t)\,dt\right\|_{L^p(d\mu)}\leqslant B_p\|f\|_{L^p(d\mu)} \tag{1}$$

где P_r — ядро Пуассона. Он доказал, что для того, чтобы имело место (1), необходимо и достаточно, чтобы:

1) $d\mu(x)=W(x)dx$;

2) $W(x)$ — 2π-периодическая положительная функция, удовлетворяющая условию

$$(A_p)\quad\left[\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right]\left[\frac{1}{|I|}\int_I [W(x)]^{-\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\leqslant B_p$$

для любого интервала I.

Отметим, что М. Розенблюм условие 2) получил в другой, эквивалентной форме, а условие (A_p) в выписанном виде впервые было получено Б. Макенхауптом [2] при описании весовых пространств L^p, где максимальный оператор Харди—Литтлвуда непрерывен. Далее, важные весовые неравенства были получены Р. Хантом, Б. Макенхауптом, Г. Уиденом, Р. Ганди, Р. Койфманом и К. Фефферманом (см. [3-5]). В работе [1] была поставлена проблема о решении задачи, подобной (1) для более широких классов аппроксимативных единиц.

В настоящей работе рассматривается задача, подобная (1) для ядер, которые возникают при суммировании по Абелю подсистем тригонометрической системы в весовых пространствах, где они имеют единственные биортогональные системы.

Отметим, что впервые задачу о полноте неполной ортонормированной системы в весовом пространстве L^2 рассмотрели Р. Боас и

Г. Поллард ([6]). В дальнейшем Дж. Прайс и Р. Зинк ([7]) описали все те системы функций, которые полны в некотором весовом пространстве L^p, а Бен-Ами Браун ([8]) показал, что для некоторых подсистем базисов в L^p, $p\geq 1$ можно найти весовые пространства L^p, где они замкнуты в некотором более сильном смысле. Нужно отметить также, что впервые, наверное, свойства неполных ортогональных систем исследовал Дж. Марцинкевич, а А. А. Талаляном ([9]) были получены результаты, которые играют важную роль при рассмотрении некоторых задач для незамкнутых систем (см., например, ([8])). В работах ([10–13]) рассматривалась задача о базисности некоторых подсистем классических ортонормированных систем в весовых пространствах L^p, $p>1$. А в работах ([15, 16]) для ядер, возникающих при исследовании этих систем, рассматривалась задача, подобная (1).

Для фиксированного неотрицательного целого n и различных точек $x_l (1\leq l\leq s)$, $-\pi\leq x_1<x_2<\ldots<x_s<\pi$ рассмотрим ядро, имеющее вид

$$K_r(x,\ t)=P_r(t-x)-\sum_{l=1}^{s}\sum_{\lambda_l=0}^{\alpha_l-1}P_r^{(\lambda_l)}(t-x_l)T(x_l,\ \lambda_l,\ x), \tag{2}$$

где P_r — ядро Пуассона, $\sum_{l=1}^{s}\alpha_l=2n+1$; $T(x_l,\ \lambda_l,\ x)$ — тригонометрический полином n-ой степени, для которого $T^{(h)}(x_i,\ \lambda_i,\ x_k)=1$ при $k=i$ и $h=\lambda_i$ и равен нулю в остальных случаях, где $0\leq h\leq\alpha_i$, $1\leq i\leq s$. $T^{(h)}$ означает производную T h-того порядка, $T^{(0)}=T$.

Обозначим

$$\omega(x)=\left|\prod_{1\leq l\leq s}\sin^{\alpha_l}\frac{x-x_l}{2}\right|. \tag{3}$$

Верна следующая

Теорема 1. *Пусть $\psi(x)$ — положительная 2π-периодическая функция и $p\geq 1$.*

Тогда для того, чтобы

$$\left\|\int_{-\pi}^{\pi}K_r(x,\ t)f(x)\,dx\right\|_{L^p(\psi)}\leq B_p\|f\|_{L^p(\psi)}\quad(0<\varepsilon<r<1),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная константа C_p такая, что:

а) для любого интервала I

$$(A_p^\omega)\qquad \frac{1}{\int_I\omega\,dx}\int_I\psi\,dx\left[\frac{1}{\int_I\omega\,dx}\int_I\left[\frac{\omega^p}{\psi}\right]^{\frac{1}{p-1}}dx\right]^{p-1}\leq C_p,$$

где второй множитель при $p=1$ означает норму $\frac{\omega^p}{\psi}$ в L^∞ на интервале I;

б) для любого $0<a<\pi$ и $1\leq l\leq s$

$$\frac{1}{a^{m_i}}\int\limits_{|x-x_i|\leqslant a} W dx\left[\int\limits_{|x-x_i|>a}\left|\frac{\omega^p(x)}{\left|\sin\frac{x-x_i}{2}\right|^p\psi(x)}\right|^{\frac{1}{p-1}}dx\right]^{p-1}<C_p.$$

Из этой теоремы и теоремы 1 работы ([13]) выводится

Теорема 2. *Пусть n—неотрицательное число и $\psi(x)$—положительная 2π-периодическая функция.*

Тогда для того, чтобы система $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=n+1}^{\infty}$ была базисом Абеля в $L^p_{[-\pi,\pi]}(\psi dx)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали различные точки $\{x_i\}_{i=1}^{s}$ и натуральные числа $\{\alpha_i\}_{i=1}^{s}$, $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=2n+1$, для которых имели бы место условия а) *и* б).

Для доказательства достаточности теоремы 1, в частности, доказываются следующие леммы.

Лемма 1. $\sum_{l=1}^{s} T(x_l, 0, x)=1$

Лемма 2. *Для любого* $l(1\leqslant l\leqslant s)$

$$P_r(t-x)T(x_l, 0, x)-\sum_{\lambda_l=0}^{\alpha_l-1}P_r^{(\lambda_l)}(t-x_l)\,T(x_l, \lambda_l, x)=$$

$$=P_r(t-x)\prod_{1\leqslant j\leqslant s}\sin^{\alpha_j}\frac{x-x_j}{2}\left[\sin\frac{x-x_l}{2}\,\gamma_1(t)+\cos\frac{x-x_l}{2}\,\gamma_2(t)\right],$$

где

$$|\gamma_1(t)|\leqslant C'[1-2r\cos(t-x_l)+r^2]^{-\frac{\alpha_l+1}{2}},$$

$$|\gamma_2(t)|\leqslant C''[1-2r\cos(t-x_l)+r^2]^{-\frac{\alpha_l}{2}},$$

C' и C''—абсолютные константы.

Для формулировки следующих двух лемм, которые доказываются для случая $p>1$, определим максимальную функцию

$$\chi^{\omega}(f, t)=\sup_{t\in I}\frac{1}{\int\limits_I \omega dx}\int\limits_I|f(x)|\omega(x)dx,$$

где супремум берется по всем интервалам, содержащим точку t.

Лемма 3. *Существует некоторая константа $C>0$ такая, что*

$$\left|\int\limits_{-(1-r)}^{1-r} f(t-x)\left[P_r(x)\,T(x_l, 0, t-x)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{\lambda_l=0}^{\alpha_l-1}P_r^{(\lambda_l)}(t-x_l)\,T(x_l, \lambda_l, t-x)\right]dx\right|\leqslant C\chi^{\omega}(f, t).$$

Лемма 4. *При $|t-x_l|\geqslant 1-r$, $t\in[-\pi, \pi]$ существует некоторая константа $C>0$ такая, что*

$$\left| \int\limits_{|t-x_i^t|>|x|>1-r} f(t-x) \right| P_r(x) T(x_i, 0, t-x) -$$

$$- \sum_{\nu_i=0}^{s_i-1} P_r^{(\nu_i)}(t-x_i) T(x_i, \nu_i, t-x) \left| dx \right| \leq C \chi^{-}(f, t)$$

где

$$x_i^t = \begin{cases} x_i & \text{при } x_i - t \in [-\pi, \pi] \\ x_i - 2\pi & \text{при } x_i - t \geq \pi \\ x_i + 2\pi & \text{при } x_i - t \leq -\pi \end{cases}$$

Скажем, что $\omega(x) \geq 0$ обладает свойством (•), если для любого интервала I, $\int_{I^*} \omega\, dx \leq C \int_I \omega\, dx$, где C — абсолютная положительная константа, а I^* — интервал, полученный „раздуванием" в два раза интервала I относительно центра этого интервала.

Следующая теорема является разновидностью теоремы Б. Макенхаупта ([2]).

Теорема 3. *Пусть* $\omega(x) \geq 0$, $p > 1$ *и* ω, $\psi \in L^1_{loc}(R)$. *Тогда для того, чтобы*

$$\int\limits_R |\chi^{-}(f, t)|^p \psi(t)\, dt \leq C_p \int\limits_R |f(t)|^p \psi(t)\, dt$$

имело место для всех $f \in L^p(\psi dt)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (A_p^{-}).

Краткое и наглядное доказательство этой теоремы получим, следуя схеме доказательства, приведенного в работе Р. Койфмана и К. Феффермана ([5]) для случая $\omega(x) \equiv 1$. Недостает только следующей леммы, которую и докажем.

Лемма 5. *Пусть* $\omega(x)$, $\psi \in L^1_{loc}(R)$ *и обладает свойством* (•). *Тогда если для* $p > 1$ *имеет место условие* (A_p^{-}), *то для некоторого* $\varepsilon > 0$ *имеет место условие* $(A_{p-\varepsilon}^{-})$.

Доказательство леммы 5. Обозначим $V(x) = \left| \dfrac{\omega^p(x)}{\psi(x)} \right|^{\frac{1}{p-1}}$, тогда

$$\psi = \left(\frac{V^{p-1}}{\omega^p} \right)^{-1} = \left(\frac{V}{\omega^q} \right)^{-(p-1)} = \left(\frac{V}{\omega^q} \right)^{-\frac{1}{q-1}} \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

следовательно, в условии (A_p^{-}), написав выражение ψ через V и ω, получаем, что V удовлетворяет условию (A_q^{-}).

Положим $d\mu_2(x) = V(x)dx$ и $d\mu_1(x) = \omega(x)dx$. Так как

$$\frac{1}{\int_I \omega\, dx} \int\limits_I |f| \omega\, dx \leq \frac{1}{\int_I \omega\, dx} \left(\int\limits_I |f|^q V\, dx \right)^{1/q} \left(\int\limits_I \left(\frac{\omega^q}{V} \right)^{\frac{1}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq$$

$$\leqslant C_p\left(\frac{1}{\int\limits_I V dx}\int\limits_I |f|^q V dx\right)^{1/q},$$

то отсюда легко следует $\int\limits_{I^*} V dx \leqslant C_p\left(\frac{\int\limits_{I^*}\omega dx}{\int\limits_I \omega dx}\right)^q \int\limits_I V dx.$

Следовательно из условия, что $\omega(x)$ обладает свойством (*), получаем, что подобным свойством обладает и $V(x)$. Отсюда и из полученного неравенства, согласно лемме 5 работы ([4]), следует, что для некоторого $\delta>0$

$$\left[\frac{1}{\int\limits_I \omega dx}\int\limits_I \left(\frac{V}{\omega}\right)^{1+\delta}\omega dx\right]^{\frac{1}{1+\delta}} \leqslant C_p \frac{1}{\int\limits_I \omega dx}\int\limits_I V dx$$

для любого интервала I.

Отсюда вместо $V(x)$, ставя ее выражение через ψ и ω, получаем для $\varepsilon = (p-1)\frac{\delta}{1+\delta}$

$$\left[\frac{1}{\int\limits_I \omega dx}\int\limits_I \left(\frac{\omega^{p-\varepsilon}}{\psi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon-1}} dx\right]^{p-\varepsilon-1} \leqslant C_p\left[\frac{1}{\int\limits_I \omega dx}\int\limits_I \left(\frac{\omega^p}{\psi}\right)^{\frac{1}{p-1}} dx\right]^{p-1}.$$

Лемма 2 доказана.

Оценки интересующего нас выражения на остальных областях проводятся с помощью весовых неравенств Харди, доказанных Г. Томасели ([17]), Г. Таленти ([18]), М. Артола, а также Б. Макенхауптом ([19]) (см. ([19])).

В заключение выражаю благодарность П. Л. Ульянову за внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

$L^p(d\mu)$, $1<p<\infty$ տարածություններում եռանկյունաչափական սիստեմների գումարումը Աբելի մեթոդով

Դիտվել է այն կշռային տարածությունների դասը, որտեղ (1) պայմանը տեղի ունի $P_r(t-x)-\sum\limits_{i=1}^{\nu}\sum\limits_{s_i=0}^{\alpha_i-1}P_r^{(s_i)}(t-x_i)T(x_i,\lambda_i,x)$ տեսքի կորիզների համար, որտեղ P_r-ը Պուասոնի կորիզն է, $\sum\limits_{i=1}^{\nu}\alpha_i=2n+1$, $-\pi<x_1<x_2<\dots<x_\nu$, $T(x_i,\lambda_i,x)$-երը n-կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամներ են այնպիսին, որ $T^{(h)}(x_i,\lambda_i,x_j)=1$, երբ $h=\lambda_i$ և $j=i$, և հավասար է զրոյի մնացած դեպքերում։

Որպես հետևանք ապացուցված է, որ $\{\sin kx, \cos kx\}_{k=n+1}^{\infty}$ տեսքի սիստեմները Աբելի բազիս են հանդիսանում միայն այդ կշռային տարածություններում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Rosenblum.* TAMS, vol. 105, № 1 (1962). [2] *B. Mackenhoupt.* TAMS, vol 165, № 3 (1972). [3] *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden.* TAMS, vol 176 (1973). [4] *R. Gundy, R. Wheeden,* Stud. Math., vol 49 (1974). [5] *R. Coifman, C. Fefferman,* Stud. Math., vol. 51 (1974). [6] *R. Boas, H. Pollard,* Bull. Amer. Math. Soc. vol. 54, № 6 (1948). [7] *J. Price, R. Zink,* Ann. Math. Ser. 2, vol. 82, № 1 (1965). [8] *Braun Ben-Ami* TAMS, vol 179 (1973). [9] *А. А. Талалян,* УМН, т. 15, № 5 (1960). [10] *К. С. Казарян.* ДАН АрмССР, т. 62, № 4 (1976). [11] *К. С. Казарян.* Anal Math т. 4, № 1 (1978). [12] *К. С. Казарян.* Изв. АН АрмССР, сер матем., т. 13, № 4 (1978). [13] *К. С. Казарян,* ДАН АрмССР, т. 69 № 5 (1979). [14] *В. Ф. Гапошкин,* ДАН ГрССР, т. 96, № 3 (1979). [15] *К. С. Казарян.* ДАН АрмССР, т. 65, № 3 (1977). [16] *К. С. Казарян,* ДАН АрмССР, т. 65, № 5 (1977). [17] *G. Tomaselli,* Boll. Un. Math. Ital., vol. 21 (1969). [18] *G. Talenti,* Rend. Sem. Mat e Fis. Milano, vol. 39 1969). [19] *B. Mackenhoupt,* Stud. Math., vol. 44 (1972).