

УДК 517.983

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рубанович

Пространства Гёльдера с весом и псевдодифференциальные операторы

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 3/VII 1980)

Статья посвящена построению исчисления глобальных в R^n псевдодифференциальных операторов с негладкими символами и изучению действия псевдодифференциального оператора P в пространствах Гёльдера с весом. Для гёльдеровой в ограниченной области G функции u изучено поведение Pu вблизи границы области.

Для краткости введем обозначения. Если $x \in R^n$, то $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$, а если заданы точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n$, то

$$\Delta x = x^{(2)} - x^{(1)}; \quad \Delta u(x) = u(x^{(2)}) - u(x^{(1)}).$$

Определение 1. Пусть заданы числа $\delta \geq \beta \geq 0$; $\lambda \geq 0$. Пусть $m_0 = [\lambda]$ — целая часть λ и $\lambda_0 = \lambda - [\lambda]$. Пространство $H_{\lambda, \beta}^{\delta}$ определим как множество m_0 -кратно дифференцируемых функций $u: R^n \rightarrow R$, производные от которых удовлетворяют оценкам

$$|D^k u(x)| \leq c |x|^{n-1-\lambda_0} \quad (|k| \leq m_0); \quad (1)$$

$$|\Delta D^k u(x)| \leq c |\Delta x|^{\beta} \cdot \sum_{j=1}^2 |x^{(j)}|^{-\beta} \langle x^{(j)} \rangle^{1-\beta} \quad (|k| = m_0) \quad (2)$$

при любых $x, x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n$. Здесь D — оператор дифференцирования, а k — мультииндекс. Нормой в этом пространстве (будем обозначать через $\| \cdot \|_{H_{\lambda, \beta}^{\delta}}$) будем считать минимальную константу c , с которой оценки (1) и (2) выполнены при всех $x, x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n \setminus \{0\}$.

Имеют место непрерывные вложения:

$$H_{\lambda, \beta}^{\delta} \subset H_{\lambda, \beta}^{\delta-1} \quad (0 \leq 1 \leq \min(\beta, \lambda)).$$

Нам нужно определить свертку функций из пространств $H_{\lambda, \beta}^{\delta}$. С этой целью вложим $H_{\lambda, \beta}^{\delta}$ в пространство $S'(R^n)$ обобщенных функций.

Определение 2. Функционал $U \in S'(R^n)$ назовем почти обобщенным (п. о.) функционалом класса $H_{\lambda, \beta}^{\delta}$, если

- 1) На $R^n \setminus \{0\}$ функционал U регулярен и $U = u(x) \in H_{\beta, \lambda}^r$.
 2) При $r = \beta - \lambda - n = 0, 1, 2, \dots$

$$\left| \int_{|x| \leq b} u(x) x^k dx \right| \leq c \quad (|k| = r, b \geq a > 0), \quad (3)$$

где константа c не зависит от a и b .

3) При $r < 0$ функционал U регулярен на R^n , а при $r \geq 0$ действует по формуле:

$$\begin{aligned} (U, \psi) &= \int_{R^n} u(x) \left| \psi(x) - \sum_{|k| < r} \frac{x^k}{k!} D^k \psi(0) - \right. \\ &\quad \left. - \theta(x) \sum_{|k|=r} \frac{x^k}{k!} D^k \psi(0) \right| dx + \sum_{|k|=r} a_k D^k \psi(0) \quad (\psi \in S), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\theta(x) = 0$ при $|x| > 1$; при $r \neq 0, 1, \dots$ последние две суммы в (4) отсутствуют.

Нормой в пространстве $\check{H}_{\beta, \lambda}^r$ будем считать

$$\|U\|_{\beta, \lambda}^r = \|u\|_{\beta, \lambda} + \min c + \sum_{|k|=r} |a_k|, \quad (5)$$

где $\min c$ — минимальная возможная константа в (3) (при $r \neq 0, 1, \dots$ это слагаемое отсутствует). Число $r = \beta - \lambda - n$ назовем порядком п. о. функционала U .

Если U и U_1 — п. о. функционалы классов $\check{H}_{\beta, \lambda}^r$ и $\check{H}_{\beta_1, \lambda_1}^{r_1}$ соответственно, где $r = \beta - \lambda - n, r_1 = \beta_1 - \lambda_1 - n > n$, то можно определить ассоциативную и коммутативную свертку $U \cdot U_1$. Следующая теорема указывает класс, которому эта свертка принадлежит.

Теорема 3. Пусть $U_1 \in \check{H}_{\beta_1, \lambda_1}^{r_1}, U \in \check{H}_{\beta, \lambda}^r$, где $r = \beta - \lambda - n \neq 0, 1, \dots$ (обозначим $r_1 = \beta_1 - \lambda_1 - n$ и пусть

$$r = r_1 < 0; \quad r > r_1; \quad \beta_1 > \max(n, r); \quad r - \beta \leq \beta_1 - \beta_1,$$

причем число $r = r_1$ — нецелое. Тогда

$$U_1 \cdot U \in \check{H}_{\beta, \lambda}^{r-r_1}, \quad \|U_1 \cdot U\|_{\beta, \lambda}^{r-r_1} \leq c \|U_1\|_{\beta_1, \lambda_1}^{r_1} \|U\|_{\beta, \lambda}^r,$$

Теперь перейдем к псевдодифференциальным операторам (п. д. о.). Вначале определим классы ядер таких операторов. Эти классы определим с помощью индукции по гладкости λ .

Определение 4. Пусть заданы числа $\lambda > 0, \beta \geq \beta_1 \geq 0$ и $r \geq 0$ и функция $x(x, y) : R^n \times R^n \rightarrow \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Назовем x ядром класса $K_{\beta, \lambda}^r$, если выполнены условия

- 1) Существует отображение $\check{x}(x) : R^n \rightarrow \check{H}_{\beta, \lambda}^r$ такое, что $\check{x}(x)(y) = x(x, y)$ при $y \neq 0$ и

$$\|\check{x}(x)\|_{\beta, \lambda}^r \leq c \langle x \rangle^{-r} \quad (c = \text{const}).$$

2) Обозначим $\alpha_0 = \min(1, \beta)$. Если $\alpha_0 \leq 1$, то для какого-нибудь числа $\gamma > 1$ и всех $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n$, таких, что $|\Delta x| \leq |x^{(1)}| \leq |x^{(2)}|$, существует константа c , не зависящая от $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, с которой

$$\|\Delta x\|_{\beta-\alpha_0, \beta-\alpha_0}^{\gamma} \leq c |\Delta x|^{\alpha_0} \langle x^{(1)} \rangle^{-\gamma-\alpha_0}.$$

3) Если $\beta > 1$, то $\frac{\partial}{\partial y_i} \kappa(x, y) \in K_{\beta-1, \beta-1}^{\gamma}$, а если еще и $\beta > 1$, то $\frac{\partial}{\partial x_i} \kappa(x, y) \in K_{\beta-1, \beta-1}^{\gamma}$.

Определение 5. Пусть в $R^n \times R^n$ задано ядро $\kappa(x, y) \in K_{\beta, \beta}^{\gamma}$. Псевдодифференциальным оператором назовем оператор

$$PU(x) = \int_{R^n} \kappa(x)(y) U(y) dy, \quad (U \in H_{\beta, \beta}^{\gamma}; x \neq 0),$$

где свертка берется по переменной y , указанной над знаком свертки. Число $r = \beta - 1 - n$ назовем порядком п. д. о.

Теорема 6. Пусть в условиях определения 5

$$l - d - r < 0; \quad 1 \geq l - r > 0; \quad \beta > n - l - r; \quad \beta \geq d + l - r,$$

причем $l - r$ — нецелое. Тогда п. д. о. P ограничен из $H_{\beta, \beta}^{\gamma}$ в $H_{\beta, \beta}^{\gamma+r}$.

Для функций $u \in S(R^n)$, если $\beta < 0$, или $r = 0, 1, \dots$ п. д. о. из определения 5 можно записать в виде:

$$Pu(x) = \int_{R^n} \kappa(x, x-y) \left[u(y) - \sum_{|k| \leq r} \frac{(y-x)^k}{k!} D^k u(x) \right] dy.$$

Чтобы сравнить эти операторы с известным определением п. д. о. введем понятие символа.

Определение 7. Символом п. д. о. P с ядром $\kappa(x, y) \in K_{\beta, \beta}^{\gamma}$ назовем отображение $\tilde{\kappa}(x) : R^n \rightarrow S'(R^n)$, являющееся при каждом x преобразованием Фурье от функционала $\tilde{\kappa}(x)$.

Следующая теорема позволяет описать символы (следует иметь в виду, что $H_{\beta, \beta}^{\gamma} \subset H_{\gamma, \beta}^{\gamma}$ при $\beta \leq \gamma \leq 0$).

Теорема 8. Пусть $U \in H_{\beta, \beta}^{\gamma}$, и $\gamma > n$. Тогда для сколь угодно малого $\epsilon > 0$

$$\tilde{U} \in H_{\beta-\epsilon, \beta-\epsilon}^{\gamma-\epsilon} \quad \|\tilde{U}\|_{\beta-\epsilon, \beta-\epsilon}^{\gamma-\epsilon} \leq c \|U\|_{\beta, \beta}^{\gamma}.$$

Эта теорема позволяет также описать ядро по символу и дает возможность утверждать, что введенный выше класс операторов содержит класс $S_{\beta, \beta}^{\alpha}$, введенный Хёрмандером (1).

Обозначим теперь $H_{\beta}^{\gamma} = H_{\beta, \beta}^{\gamma}$. У функций класса H_{β}^{γ} отсутствует сингулярность в нуле. Пусть задано отображение $\mu : R^n \rightarrow R^n$ такое, что

$$\gamma - |z| \leq |\mu(x) - \mu(x-z)| \leq \gamma + |z|,$$

где $0 < \gamma \leq \gamma' < \infty$ — некоторые константы. Пусть каждая компонента

отображения $\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$ принадлежит классу H_{α}^{s-1} , где $\alpha > 1$. Замену переменных в п. д. о. P , определяемую отображением μ , будем понимать обычным образом (см., например, (2), с. 39).

Теорема 9. Пусть P — п. д. о. порядка r с ядром $x(x, y) \in K_{\beta, \lambda}^{s, r}$, где $\beta > \beta + 1$ и $\lambda \geq t$ для целого t из интервала $r-1 < t \leq r$. Пусть число γ таково, что $0 \leq \gamma \leq 1$ и $\gamma < \min(\beta/2, 1)$. Тогда, после описанной выше замены переменной с $\alpha \geq \max(r+1, 2)$, п. д. о. P перейдет в оператор $P_1 = A_1 + A_2 + Q_1$, где A_1 — п. д. о. с ядром

$$x_1(x, y) = x(\mu(x), \mu'(x)y) |\det \mu'(x)| \in K_{\beta, \lambda}^{s, r},$$

где μ' — матрица Якоби; A_2 есть п. д. о. порядка $r-\gamma$ с ядром $x_2(x, y) \in K_{\beta-\gamma, \lambda}^{s-\gamma, r-\gamma}$;

$$Q_1 v(x) = \sum_{|k| \leq |k| \leq r-1} a_k(x) D^k v(x); \quad a_k \in H_{\alpha-m+|k|-1}$$

Развитые выше методы можно применить, например, для получения следующего результата. Пусть задана ограниченная область G с границей Γ класса $H_{1+\alpha} = C_{1+\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$. Всякую функцию $u \in H_1(G)$ положим равной нулю вне G . Пусть $x(x, y) \in K_{\beta, \lambda}^{s, r}$. Если $r = \beta - 1 - n < l$, то внутри области G определена функция $Pu(x) = x(x, y) \cdot u(y)|_{y=\mu(x)}$, которую мы будем считать значением п. д. о. P . Так как область G ограничена, то β и r можно считать как угодно большими и вообще ими не интересоваться. Пусть ν_x — единичная внутренняя нормаль в точке $x \in \Gamma$. Потребуем, чтобы равномерно по $x \in \Gamma$ символ $x(x, \xi)$ удовлетворял условиям:

$$x(x, l\nu_x) = |l|^r a_{-}(x) = O(|l|^{r-l-1}) \quad \text{при } l \rightarrow \pm\infty, \quad (6)$$

где $a_{-}(x)$ — некоторые функции на Γ , а $\varepsilon > 0$ — какое-нибудь число, не зависящее от x . При $r \geq 0$ дополнительно потребуем, чтобы равномерно по $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Gamma$

$$(\Delta_x x(x, l\nu_x) - |l|^r \Delta_x a_{-}(x)) |\Delta x|^{r-l} = O(|l|^{-1}) \quad (7)$$

при $l \rightarrow \pm\infty$. Тогда имеет место

Теорема 10. Пусть $0 < l$, $l-r < \alpha$ и выполнено одно из условий:

- 1) $l = 1$ и $\alpha \geq \max(l, l-r)$,
- 2) $l < 1$ и $\alpha = 1$.

Пусть также, при $r \geq 0$, $a_{-}(x) \in H_{1-\alpha}(\Gamma)$. Определим на Γ функцию

$$a(x) = -i\Gamma(1-r)(e^{i\pi/2} a_{+}(x) - e^{-i\pi/2} a_{-}(x)), \quad (8)$$

и пусть $a \in H_1(\Gamma)$. Тогда, для $u \in H_1(G)$, внутри G имеет место равенство

$$Pu(x) = v_1(x) + v_2(x) |d^{-'}(x) + v_3(x)|,$$

где $d(x)$ — расстояние от x до Γ ; при $r = 0$ вместо d^{-r} следует поставить $\ln d$; $v_1 \in H_{1-r}(\bar{G})$; $v_2 \in H_1(\bar{G})$; $v_3 \in H_{1-r}(\bar{G})$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Мало того,

$$v_2(x)|_{\Gamma} = -au; \quad \|v_2\|_{1-r} \leq c\|u\|_1;$$

$$\|v_1\|_1 + \|v_3\|_{1-r} \leq c\|u\|_1 + c\|u\|_{H_1(\Gamma)},$$

где константа c , от ядра κ не зависит.

Доказательство этой теоремы основано на следующем утверждении.

Лемма 11. Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; $x = (x', x_n)$. Каждой области G и функции u противопоставим область G_+ и функцию u_+ соответственно:

$$G_+ = \{x \in G : x_n > 0\}; \quad u_+(x) = \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0 \\ 0, & x_n < 0 \end{cases}$$

Предположим, что в ситуации, описанной перед теоремой 10, $0 < l$, $1-r < l \leq 1$. Пусть выполнено условие (6) на гиперплоскости $R^{n-1} = \{x = (x', 0)\}$ и с $v_1 = (0, \dots, 0, 1)$, а при $r \geq 0$ на R^{n-1} выполнено еще и условие (7), где $u_2 \in H_{1-r}(R^{n-1})$. Тогда для всякой ограниченной области G и сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует константа $c_{0,1}$, такая, что если функция $u \in H_1(\bar{G})$ и финитна в $\bar{G}$, то

$$\|Ru_+ - a(x')u(x', 0)x_n^{-r} + v(x)\|_{1-r} + \|u\|_{1-r} \leq c_{0,1}\|u\|_1,$$

где $v(x)$ — некоторая функция, зависящая от u ; функция $a(x')$ задается формулой (8); в левой части стоят нормы в $H_{1-r}(\bar{G}_+)$ и $H_{1-r}(\bar{G}_-)$; при $r = 0$ вместо x_n^{-r} следует поставить $\ln x_n^{-1}$.

Приведем подробную схему доказательства этой леммы для случая: $r \geq 0$. Для рассмотрения случая: $r > 0$ требуется теорема о композиции п. д. о., которую мы не привели ввиду недостатка места.

Доказательство. Введем п. о. функционал Λ_r по его преобразованию Фурье $\bar{\Lambda}_r(\xi) = (\xi_n - i\langle \xi' \rangle)^r$, где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, а $\xi = (\xi', \xi_n)$. Согласно теореме 8 это есть п. о. функционал порядка r , и согласно лемме Виннера-Пэли носитель Λ_r сосредоточен в полупространстве $x_n \leq 0$, так что $\Lambda_r \circ u_+(x)$ зависит лишь от значений $u(y)$ в точках с $y_n \geq x_n$. Но тогда $\Lambda_r \circ u_+(x) = \Lambda_r u(x)$ при $x_n > 0$ и с помощью теоремы 3 получаем:

$$\Lambda_r \circ u_+ \in H_{1-r}(\bar{G}_+).$$

Обозначим также

$$\tau_r(t) = (t + i0)^{-r} \varphi(t) \text{ при } r \neq 0, \text{ или } \tau_r(t) = (b - \ln(t + i0)) \varphi(t) \quad (9)$$

при $r = 0$, где $\varphi \in C_0^\infty(R)$ и $\varphi(t) = 1$ при $|t| \leq 1$, а $b = \text{const}$. Нетрудно проверить, что при подходящей константе b

$$\bar{\tau}_r(\xi) = b e^{i\pi r/2} |\xi|^{-r} (O(|\xi|^{-N}) + 1) \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty, \quad (10)$$

где $b = 0$; $b = -l(\Gamma(1-r))^{-1}$, а N_1 — сколько угодно большое. Используя теорему 8, из условия (6) получаем оценку при $x = (x', 0)$

$$|\bar{x}(x, \xi) - a(x') - \bar{\Lambda}_r(\xi) - a(x')| \frac{\xi_n}{\langle \xi' \rangle^{1-r}} \left| \bar{\tau} \left(\frac{\xi_n}{\langle \xi' \rangle} \right) \right| \leq c \frac{\langle \xi' \rangle^{r+1}}{\langle \xi \rangle^1} \quad (11)$$

для некоторого $\gamma > 1-r$, а из условия (7) получаем при $x^{(1)} = (x'^{(1)}, 0)$ и $x^{(2)} = (x'^{(2)}, 0)$ оценку

$$|\Delta_x \bar{x}(x, \xi) - \Delta_x a(x') - \bar{\Lambda}_r(\xi) - \Delta_x a(x')| \frac{\xi_n}{\langle \xi' \rangle^{1-r}} \left| \bar{\tau} \left(\frac{\xi_n}{\langle \xi' \rangle} \right) \right| \leq c \frac{\langle \xi' \rangle^{r+1}}{\langle \xi \rangle^1} \quad (12)$$

для некоторого $\delta > 0$. Каждый из следующих пяти пунктов посвящен отдельному случаю ядра $x(x, y)$.

1) $x(x, y) = x(y)$; $r > 0$ и $a(x') = 0$. В силу свойств Λ_r достаточно рассмотреть оператор $P = a \cdot \Lambda_r$. Теперь можно считать, что $a = 0$. Пусть $\psi(y) \in C_0^\infty(R^n)$ и $\psi(y) = 1$ в окрестности области G . Имеем при $x_n > 0$

$$\begin{aligned} Pu_+(x) &= \int_{R^n} x(x-y)(u_+(y) - u_+(x))dy = \int_{y_n > 0} x(x-y)(u(y) - \\ &- u(x))dy = u(x) \int_{y_n < 0} (1 - \psi(y))x(x-y)dy = u(x) \int_{y_n < 0} \psi(y)x(x-y)dy. \end{aligned}$$

Первый интеграл в третьей части этого равенства принадлежит $H_{1-r}(\bar{G})$. Это можно проверить непосредственно. Легко видеть, что и второе слагаемое $\in H_{1-r}(\bar{G})$. Третий интеграл после обозначения $\psi_- = \psi - \psi_+$ примет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-i(x,y)} \bar{x}(\xi) \bar{\psi}_-(\xi) d\xi = \int_{R^n} e^{-i(x,y)} 0(\langle \xi \rangle^{-1-N} \langle \xi' \rangle^{-N}) d\xi,$$

где N — сколько угодно велико. Здесь мы учли оценку (11) (с $a = 0$) и оценку $|\bar{\psi}_-(\xi)| \leq c_N \langle \xi' \rangle^{-N} \langle \xi \rangle^{-1}$. Остается заметить, что

$$|\Delta_x e^{i(x,y)}| \leq |\Delta x|^{1-r} |\xi|^{1-r}.$$

2) $x(x, y) = x(y)$; $r = 0$ и $a = 0$. Здесь достаточно заметить, что включение $Pu_+ \in H_{1-r}(\bar{G})$ эквивалентно включению $\Lambda_r \cdot Pu_+ \in H_{1-r}(\bar{G}_+)$, где $\epsilon > 0$, а ядро $\Lambda_r(y) \cdot x(y)$ удовлетворяет условию пункта 1).

3) $x(x, y) = x(x', y)$ и $a(x') = 0$. В этом случае утверждение леммы проверяется без труда, если к результату пунктов 1) и 2) добавить оценку

$$|\Delta_x x(x', y) \cdot u(y)| \leq c \|u\| |\Delta x'|^{1-r},$$

которая получается с помощью рассуждений пунктов 1) и 2) из оценки (12).

4) $x(x, y) = x(x', y)$ и $a(x') = 0$. Обозначим через T п. д. о. с символом

$$\bar{T}(\xi) = \langle \xi' \rangle^{r-1} \bar{\xi}_n^{-1} (\bar{\xi}_n \langle \xi' \rangle^{-1}).$$

Тогда п. д. о. $\rho - a(x')T$ удовлетворяет условиям пункта 3). Остается рассмотреть Tu . Но u можно заменить на $u(x', 0)\varphi_+(x_n)$, где $\varphi \in C_0^\infty(R)$ и $\varphi(t) = 1$ при $|t| < 1$, так как $u(x', 0)\varphi_+(x_n) - u(x) \in H_l$. Имеем

$$T(u(x', 0)\varphi_+(x_n)) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{-i\xi_n x_n} \bar{T}(\xi) \bar{u}(\xi') \bar{\varphi}_+(\xi_n) d\xi,$$

где $\bar{u}(\xi')$ есть преобразование Фурье от $u(x', 0)$ по x' . Имеем

$$\bar{\varphi}_+(\xi_n) = i\xi_n^{-1} + O(\langle \xi_n \rangle^{-N}) \text{ при } |\xi_n| \rightarrow \infty,$$

где N — сколько угодно велико. Значит

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-i\xi_n x_n} \bar{T}(\xi) \bar{u}(\xi') \bar{\varphi}_+(\xi_n) d\xi &= \varphi(x_n \langle \xi' \rangle) \bar{u}(\xi') \langle \xi' \rangle^r + \\ &+ \bar{u}(\xi') \int_{R^n} O(\langle \xi_n \rangle^{-N}) \bar{\xi}_n \langle \xi' \rangle^{r-1} \bar{\varphi}_+(\xi_n \langle \xi' \rangle^{-1}) e^{i\xi_n x_n} d\xi_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Подбирая соответствующим образом $\varphi(t)$ в (9), можно добиться, чтобы $\bar{\varphi}_+(\xi_n)$ имела в нуле нуль сколь угодно большого порядка N . Тогда с помощью теоремы 8 можно убедиться, что последний интеграл в (13) есть образ Фурье по x' (при каждом x_n) п. о. функционала класса $H_{\beta, \lambda}^s(R^{n-1})$ для любых β, λ, s , таких, что $\beta - \lambda - n + 1 = -N - 1$. Аналогичное утверждение можно сделать и относительно производной по x_n от этого интеграла, только $\beta - \lambda - n + 1 = -N$. Причем нормы этих функционалов ограничены равномерно по x_n . С помощью теоремы 3 нетрудно убедиться, что последнее слагаемое в (13) определяет функцию (от (x', x_n)) класса $H_s(\bar{G})$. Первое слагаемое имеет вид

$$\bar{u}(\xi') x_n^{r-1} + \bar{u}(\xi') \varphi(x_n \langle \xi' \rangle) \langle \xi' \rangle^r \quad (\varphi \in C_0^\infty(R); \quad x_n > 0). \quad (14)$$

Преобраз Фурье второго слагаемого в (14) примет вид

$$\int_{R^{n-1}} v(x' - x_n y') \varphi_0(y') dy', \quad (15)$$

где $\varphi_0 \in S(R^{n-1})$, а $v(x')$ определяется по своему образу Фурье: $\bar{v}(\xi') = \bar{u}(\xi') \langle \xi' \rangle^r$. Теорема 3 показывает, что $v \in H_{l-r}$, а отсюда следует, что интеграл (15) принадлежит $H_{l-r}(\bar{G})$.

5) Общий случай. $x(x, y) = x(x', 0, y) + (x(x, y) - x(x', 0, y))$. Ляпконость п. д. о. с ядром $x(x, y) - x(x', 0, y)$ нетрудно исследовать непосредственно, что оканчивает доказательство леммы 11.

Теорема 10 получается из леммы 11 с помощью стандартных рассуждений, связанных с разбиением единицы и переходом к полупространству с использованием теоремы 9 о замене переменной.

Երևանский политехнический институт
им. Карла Маркса

Ս. Վ. ԽՈՒՐԱՆՈՎԻՉ

Գլուխի կրող տարածություններ և պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորներ

Հաջորդում դիտարկում են (1) և (2) պայմաններին բավարարող ֆունկցիաների $H_{\lambda, \mu}^s$ տարածություններ: Որոշումներովում է $H_{\lambda, \mu}^s$ տարածությունների ֆունկցիաների փաթեթ: Ստացված արդյունքները կիրառվում են $H_{\lambda, \mu}^s$ տարածություններում պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների սահմանափակությունը ստանալու համար: Նաև դիտարկվում է G սահմանափակ տիրույթում P պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորի դոմոդոմությունը G տիրույթում գլուխի և ֆունկցիալի վրա: Իսկ OG սահմանի մոտ ստացված է Pu -ի համար առաջադրված թանաձև (թեորեմ 10):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Хёрмандер, в сб.: Псевдодифференциальные операторы, Мир, М., 1967.
- ² М. А. Шубин, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, Наука, М., 1977.