ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

З. А. Мартиросян

Об одной контактной задаче для двух упругих конечных цилиндров

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 4/III 1980)

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для двух цилиндров, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами, и один из них по нижней торцевой плоскости закреплен. На боковой поверхности нижнего цилиндра нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю, а боковая поверхность верхнего цилиндра свободна от напряжений. Контакт между цилиндрами принимается гладким, а зона контакта двух цилиндров считается неизвестной. На верхнем торце верхнего цилиндра приложена осесимметричная сжимающая нагрузка таким способом, что контактная область образуется в виде круга. Решение рассматриваемой задачи представляется в виде суммы рядов Фурье и Фурье—Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены бесконечная система линейных уравнений и система парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя, решение которой сводится к решению квази вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Получены также формулы для определения напряжений на поверхности контакта между цилиндром и основанием. Для частных значений внешней нагрузки, упругих постоянных и размеров цилиндров вычислены размеры области контакта и напряжения в контактных зонах.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в работе ([1]).

Для решения описанной задачи величины, относящиеся к верхнему цилиндру, будем отмечать индексом 1, а к нижнему—индексом 2.

Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} F(r) & 0 \leqslant r < a \\ 0 & a < r < R \end{cases} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, l_1) = 0; \tag{1.1}$$

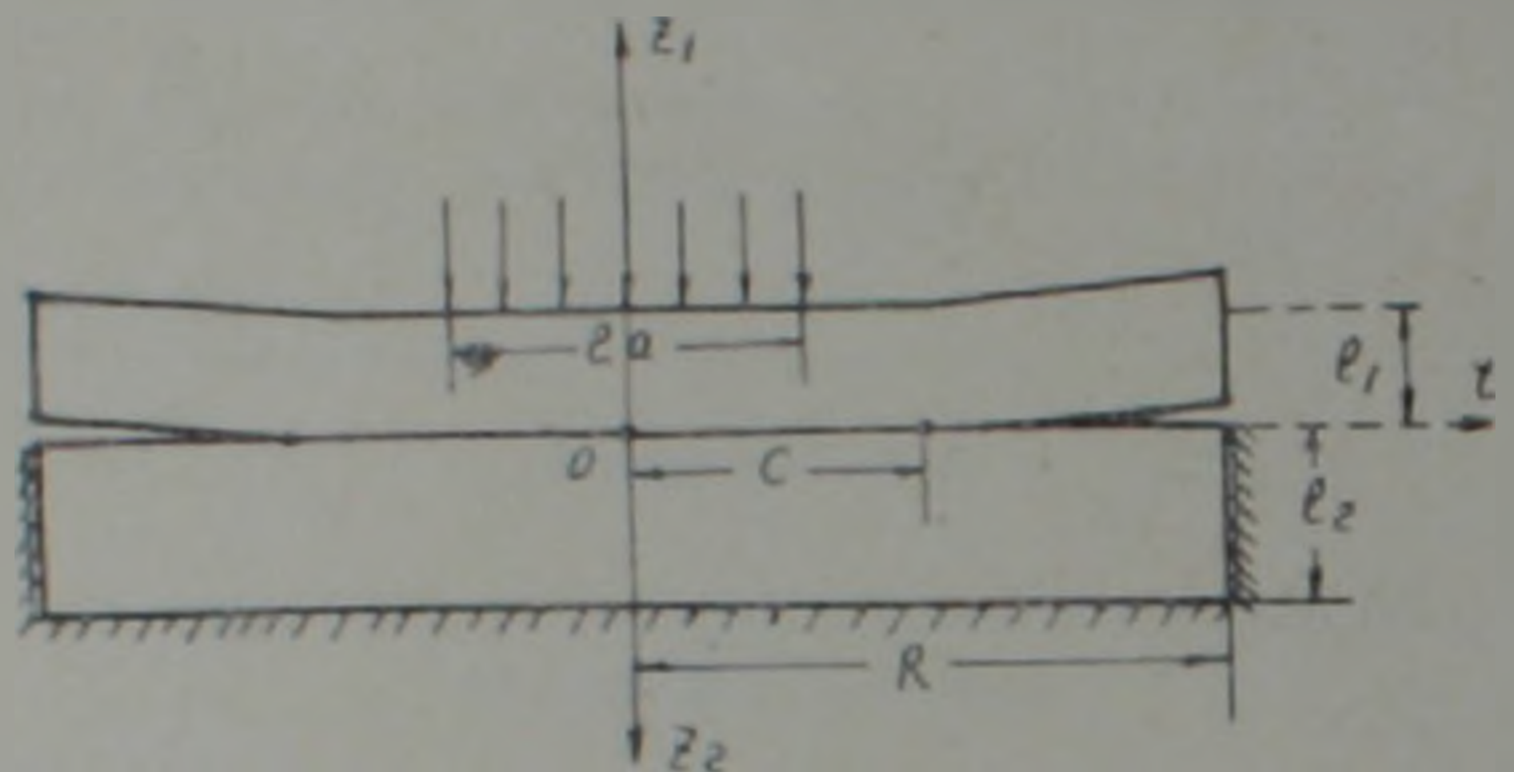

Рис. 1. Два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра. На верхнем торце верхнего цилиндра приложена осесимметричная сжимающая нагрузка

$$u_z^{(2)}(r, l_2) = u_r^{(2)}(r, l_2) = 0; \tag{1.2}$$

$$\sigma_r^{(1)}(R, z) = \tau_{rz}^{(1)}(R, z) = u_r^{(2)}(R, z) = 0; \tag{1.3}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = 0 \quad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0); \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) & 0 \leqslant r < c \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 & c < r < R \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь принято, что $F(r)$ кусочно-непрерывная и ограниченная функция на заданном интервале и может быть представлена в виде ряда Фурье—Дини, l_i—длины, R—радиус цилиндров, $J_n(x)$—функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а β_k—положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R) = 0$

Функции напряжения Лява ищем в виде ([2])

$$\Phi^{(i)}(r, z) = z(A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(i)} I_0(\lambda_{ki} r) + G_k^{(i)} \lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)] \sin \lambda_{ki} z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z + C_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) J_0(\beta_k r), \tag{1.6}$$

где $I_n(x)$—функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, а $\lambda_{ki} = k\pi / l_i$.

Пользуясь обычными формулами ([3]) и вычисляя при помощи (1.6) напряжения и перемещения, удовлетворим далее условиям (1.1)—(1.5); введя также обозначения

$$\lambda_{k1}^2 G_k^{(1)} I_1(\lambda_{k1} R) = Y_k; \quad -A_k^{(1)} + (1 - 2\nu_1) D_k^{(1)} = \frac{X_k}{\beta_k^2}, \tag{1.7}$$

получим следующие соотношения:

$$A_1 = \frac{\nu_1}{2(1+\nu_1)}\,a_0; \qquad B_1 = \frac{1-2\nu_1}{6(1+\nu_1)}\,a_0;$$

$$B_2 = \frac{1}{6(1-\nu_2)}\,a_0; \quad C_2 = -\frac{l_2}{1-\nu_2}\,a_0; \quad A_2 = E_k^{(2)} = G_k^{(2)} = 0; \tag{1.8}$$

$$\Delta_k^{(1)} C_k^{(1)} = -\left(\operatorname{sh}\mu_{k1}\operatorname{ch}\mu_{k1}+\mu_{k1}\right)\frac{X_k}{\beta_k^3} - \frac{4(\mu_{k1}\operatorname{ch}\mu_{k1}+\operatorname{sh}\mu_{k1})}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2} +$$

$$+\left(\mu_{k1}\operatorname{ch}\mu_{k1}+\operatorname{sh}\mu_{k1}\right)\frac{a_k}{\beta_k^2}$$

$$\Delta_k^{(1)} D_k^{(1)} = \operatorname{sh}^2\mu_{k1}\frac{X_k}{\beta_k^3} + \frac{4\mu_{k1}\operatorname{sh}\mu_{k1}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2} - \mu_{k1}\operatorname{sh}\mu_{k1}\frac{a_k}{\beta_k^2}; \tag{1.9}$$

$$\Delta_k^{(2)} C_k^{(2)} = -\left[(3-4\nu_2)\operatorname{sh}\mu_{k2}\operatorname{ch}\mu_{k2}-\mu_{k2}\right]\left(\frac{X_k}{\beta_k^3} + \frac{4}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2}\right);$$

$$\Delta_k^{(2)} D_k^{(2)} = \left[(3-4\nu_2)\operatorname{sh}^2\mu_{k2}+2(1-\nu_2)\right]\left(\frac{X_k}{\beta_k^3} + \frac{4}{\beta_k R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2}\right); \tag{1.10}$$

$$Y_k = \frac{4\lambda_{k1}}{\lambda_1\varphi_k}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p R)\left[(-1)^k\left(C_p^{(1)}\operatorname{ch}\mu_{p1}+D_p^{(1)}\operatorname{sh}\mu_{p1}\right)-C_p^{(1)}\right]}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2}, \tag{1.11}$$

а также систему парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя

$$q_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(1+M_k)\frac{X_k}{\beta_k}J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty}N_k J_0(\beta_k r) \quad 0 \leqslant r < c;$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}X_k J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty}P_k J_0(\beta_k r) \quad c < r < R, \tag{1.12}$$

где введены обозначения

$$\Delta_k^{(1)} = \operatorname{sh}^2\mu_{k1} - \mu_{k1}^2; \quad \Delta_k^{(2)} = (3-4\nu_2)\operatorname{sh}^2\mu_{k2} + \mu_{k2}^2 + 4(1-\nu_2)^2;$$

$$\mu_{ki} = \beta_k l_i; \quad \varphi_k = \lambda_{k1}R - \frac{I_0^2(\lambda_{k1}R)}{I_1^2(\lambda_{k1}R)}\lambda_{k1}R + \frac{2(1-\nu_1)}{\lambda_{k1}R};$$

$$\varkappa = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_1+G(1-\nu)_2}; \qquad M_k = \varkappa M_k^{(1)} + (1-\varkappa)M_k^{(2)};$$

$$q_0 = -\frac{(1-2\nu_1)C_1 + G(1-2\nu_2)C_2}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)};$$

$$\Delta_k^{(2)} M_k^{(2)} = (3-4\nu_2)\operatorname{sh}\mu_{k2}(\operatorname{ch}\mu_{k2}-\operatorname{sh}\mu_{k2}) - \mu_{k2}(1+\mu_{k2}) - 4(1-\nu_2)^2; \tag{1.13}$$

$$\Delta_k^{(1)} M_k^{(1)} = \operatorname{sh}\mu_{k1}(\operatorname{ch}\mu_{k1}-\operatorname{sh}\mu_{k1}) + \mu_{k1}(1+\mu_{k1}); \quad P_k = -\frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2};$$

$$N_k = -\frac{4\beta_k}{RJ_0(\beta_k R)}\left[\frac{\alpha F_k^{(1)}}{\Delta_k^{(1)}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2}+\frac{(1-\alpha)W_k^{(2)}}{\Delta_k^{(4)}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\lambda_{p1}Y_p}{(\lambda_{p1}^2+\beta_k^2)^2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha F_k^{(1)}a_k}{\Delta_k^{(1)}\beta_k};$$

$$G=\frac{G_1}{G_2}; \qquad F_k^{(1)}=\mu_{k1}\mathrm{ch}\mu_{k1}+\mathrm{sh}\mu_{k1}; \quad W_k^{(2)}=(3-4\nu_2)\mathrm{sh}\mu_{k2}\mathrm{ch}\mu_{k2}-\mu_{k2};$$

G_i — модули сдвига, а ν_i — коэффициенты Пуассона.

Представляя X_k в виде

$$X_k=P_k+\frac{1}{(\beta_k c)^{1/2}J_0^2(\beta_k R)}\sum_{n=0}^{\infty}b_n J_{2n+1/2}(\beta_k c) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots)\ \beta_0=0 \tag{1.14}$$

и применяя известные методы решения парных рядов-уравнений ([1,4,5]), решения уравнений (1.12) сводятся к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$b_s=\sum_{n=0}^{\infty}a_{sn}b_n-\sum_{n=1}^{\infty}c_{sn}Y_n+d_s \quad (s=1,\ 2,\ \ldots), \tag{1.15}$$

где

$$a_{sn}=-2(4s+1)\left[\frac{(-1)^{n-s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)I_{2n+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{yI_1(y)}dy+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k J_{2n+1/2}(\beta_k c)J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}\right] \qquad b_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0; \tag{1.16}$$

$$c_{sn}=-\frac{8(4s+1)\sqrt{c}\,\alpha}{R^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k^{1/2}}{J_0(\beta_k R)}\,\frac{(-1)^n F_k^{(1)}-H_k^{(1)}}{\Delta_k^{(1)}(\lambda_{n1}^2+\beta_k^2)^2}\lambda_{n1}J_{2s+1/2}(\beta_k c);$$

$$d_s=\frac{2(4s+1)\sqrt{c}\,\alpha}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^{(1)}a_k J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\Delta_k^{(1)}\beta_k^{1/2}} \qquad H_k^{(1)}=\mathrm{sh}\mu_{k1}\mathrm{ch}\mu_{k1}+\mu_{k1};$$

$K_n(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода.

Подставляя значения $C_k^{(1)}$ и $D_k^{(1)}$ в (1.11) и имея в виду (1.14), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$Y_k=\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{kn}Y_n+A_k, \tag{1.17}$$

где

$$a_{kn}=\frac{4\lambda_{k1}^2}{l_1 c^{1/2}\varphi_k}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^{1/2}[H_p^{(1)}-(-1)^k F_p^{(1)}]}{J_0(\beta_p R)\Delta_p^{(1)}(\lambda_{k1}^2+\beta_p^2)^2}J_{2n+1/2}(\beta_p c);$$

$$c_{kn}=\frac{16\lambda_{k1}^3}{l_1 R\varphi_k}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p^2\{[(-1)^k F_p^{(1)}-H_p^{(1)}]+[F_p^{(1)}-(-1)^k H_p^{(1)}](-1)^n\}}{\Delta_p^{(1)}(\lambda_{k1}^2+\beta_p^2)^2(\lambda_{n1}^2+\beta_p^2)^2}\lambda_{n1}; \tag{1.18}$$

$$A_k = \frac{4\lambda_{k1}^2}{l_1 \varphi_k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p J_0(\beta_p R)}{(\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2} \cdot \frac{(-1)^k H_p^{(1)} - F_p^{(1)}}{\Delta_p^{(1)}} a_{p1}$$

Бесконечные системы линейных уравнений (1.15) и (1.17) квази вполне регулярны.

Квази вполне регулярность систем (1.15) и (1.17) доказывается аналогично тому, как это сделано в работе ([1]).

После решения бесконечных систем (1.15) и (1.17) из первого уравнения (1.12) при фиксированных r определяется q_0, а при помощи (1.13) $-C_1$.

Подставив значения X_k по формуле (1.14) во второй ряд (1.12), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение ([1]):

$$\sigma_z(r,\ 0) = a_0 + \frac{R^2(c^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}\, c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!\, F\left(-n, n+1/2, 1, \frac{r^2}{c^2}\right)}{\Gamma(n+1/2)} \quad 0 \leqslant r < c, \tag{1.19}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ — гипергеометрический ряд, а для нормального напряжения $\sigma_z^{(2)}(r,\ l_2)$ и касательного напряжения $\tau_{rz}^{(2)}(r,\ l_2)$ получим следующие соотношения:

$$\sigma_z^{(2)}(r,\ l_2) = a_0 + 2(1-\nu_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{k2}\operatorname{sh}\mu_{k2} + 2(1-\nu_2)\operatorname{ch}\mu_{k2}}{\Delta_k^{(2)}} \left[\frac{1}{(\beta_k c)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{2n+1/2}(\beta_k c) + \frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_{p1} Y_p}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] J_1(\beta_k r); \tag{1.20}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,\ l_2) = 2(1-\nu_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{k2}\operatorname{ch}\mu_{k2} - (1-2\nu_2)\operatorname{sh}\mu_{k2}}{\Delta_k^{(2)}} \left[\frac{1}{(\beta_k c)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{2n+1/2}(\beta_k c) + \frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda_{p1} Y_p}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] J_1(\beta_k r). \tag{1.21}$$

Неизвестную величину c можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = 0. \tag{1.22}$$

Численные примеры. В частности, рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра, изготовленных из различных материалов. На верхнем торце верхнего цилиндра приложена осесимметричная сжимающая нагрузка (рис. 1).

$$\sigma_z^{(1)}(r,\ l_1) = \begin{cases} -p & 0 < r < a \\ 0 & a < r < R \end{cases} = -\frac{a^2}{R^2} p - \frac{2ap}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k a) J_0(\beta_k r)}{\beta_k J_0^2(\beta_k R)} \tag{2.1}$$

Целью вычислений является определение размеров области контакта и величины контактного нормального напряжения. Для этого предварительно необходимо найти зависимость радиуса контактной области c от l. Но это связано с большим объемом вычислений. Во избежание отмеченных трудностей в работе задаются значения c и $(l_1 - l_2 = l)$ и при заданных значениях упругих характеристик материалов определяется a.

После определения радиуса c области контакта таким образом по формулам (1.19)—(1.21) вычислены контактные напряжения для каждого c, соответствующего заданному радиусу круга распределенных внешних нагрузок.

Вычисления проведены для значений $l/R = 0,2; 0,25$; $\nu_1 = 0,1; 0,3; 0,4$, $\nu_2 = 0,1; 0,3; 0,4$, $c/R = 0,3; 0,35; 0,4; 0,5; \ldots; 1$, $G = 0,5; 1; 10$.

Значения размеров зоны действия внешней равномерно распределенной нагрузки (a) при $l/R = 0,2$, $G = 0,5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$, $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0,1$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,1$, $c/R = 0,3, 0,5, 0,7, 1$ приведены в таблице.

$\frac{a}{R} \cdot 10^{-4}$

$\frac{c}{R}$	$\nu_1 = 0.1$, $\nu_2' = 0.1$	$\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.3$	$\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.1$
0.3	1445	1605	1238
0.5	3937	3984	3871
0.7	6029	6064	5967
1	9334	9351	9293

Распределение нормального напряжения $\sigma_z(r, 0)$ на поверхности контакта двух цилиндров и распределение напряжений $\sigma_z^{(2)}(r, l_2)$ на поверхности контакта между нижним цилиндром и основанием при $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$, $G = 0,5$, $c/R = 0,3; 0,4; 0,6; 0,9$ соответственно показаны на рис. 2, 3.

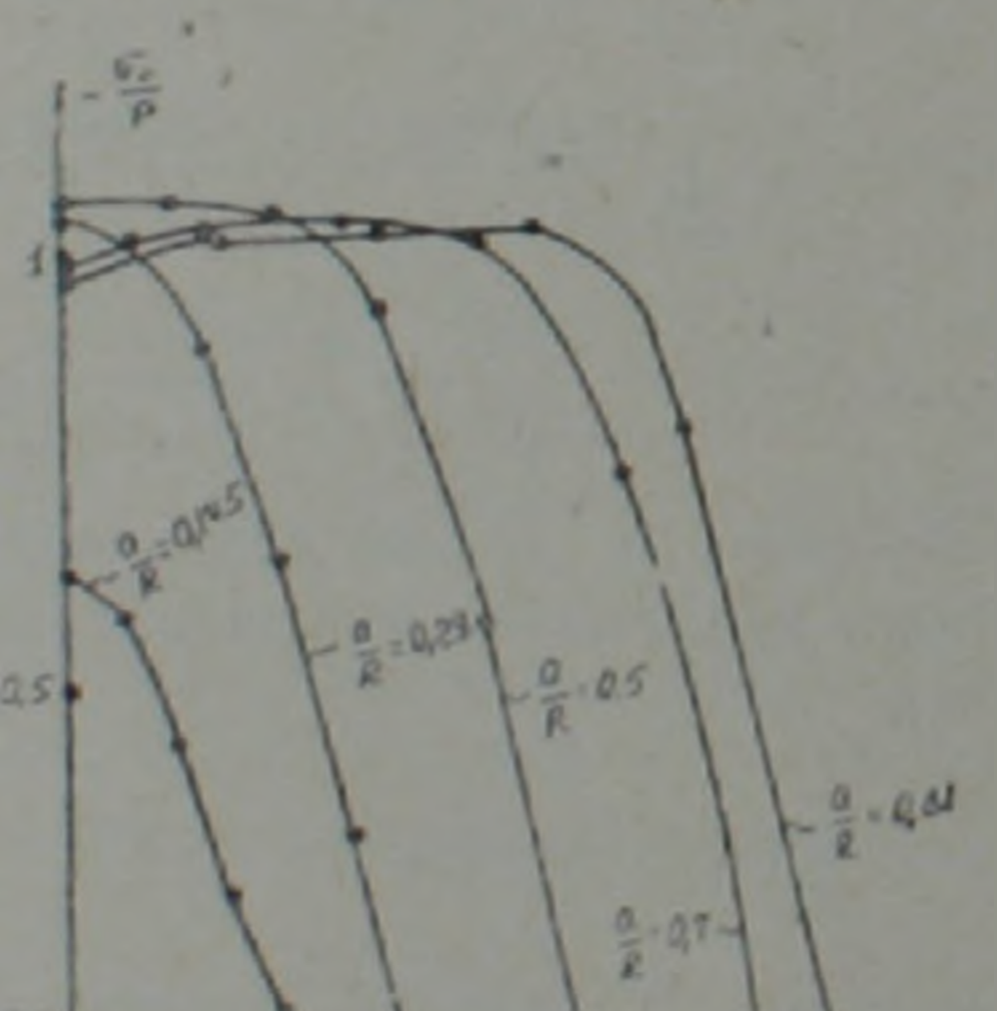

Рис. 2. Распределение нормального напряжения $\sigma_z(r, 0)$ на поверхности контакта двух цилиндров

На основании данных вычислений, часть которых приведена на рис. 2, 3 и в таблице, приходим к следующим заключениям.

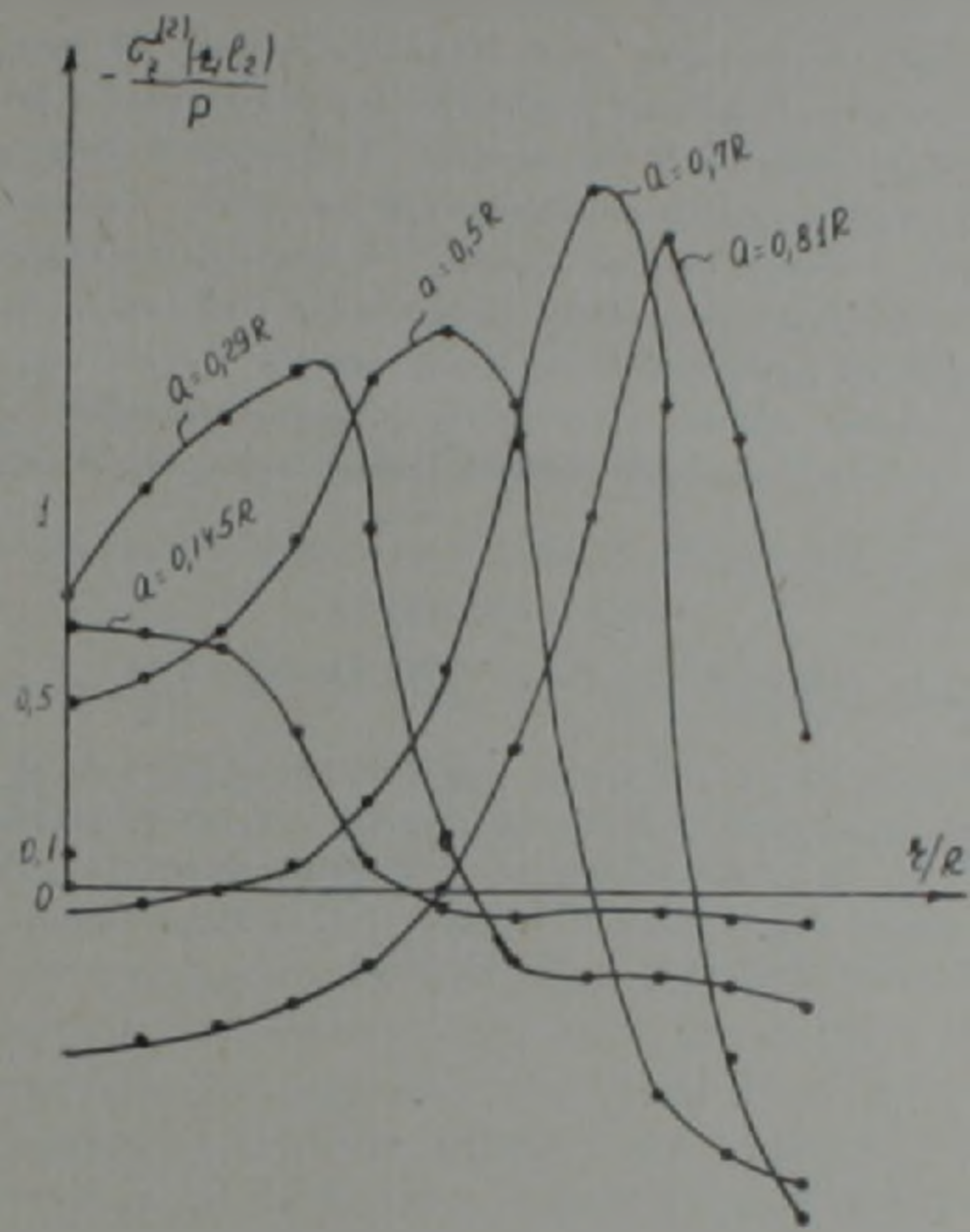

Рис. 3. Распределение напряжений $\sigma_z^{(2)}(r, l_2)$ на поверхности контакта между нижним цилиндром и основанием

Для больших значений c, в частном случае при полном контакте двух цилиндров, и при меньших значениях коэффициентов Пуассона ($\nu_1, \nu_2 < 0,15$) максимум нормального контактного напряжения смещен относительно центра контактной области, и вследствие этого в центральной части закрепленного торца нижнего цилиндра возникают растягивающие усилия, что в случае слабого сцепления может вызвать отрыв.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Զ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Երկու առաձգական վերջավոր գլանների համար մի կոնտակտային խնդրի մասին

Դիտարկվում է ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատկություններ միևնույն տրամագծեր և վերջավոր երկարություններ ունեցող երկու շրջանային գլանների առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ գլաններից մեկը ներքևի ճակատով ամրացված է կոշտ հիմքին։ Նորմալ և շոշափող լարումները վերևի գլանի գլանային մակերևույթի վրա բացակայում են, իսկ ներքևի գլանի գլանային մակերևույթի վրա նորմալ տեղափոխումները և շոշափող լարումները հավասար են զրոյի։ Գլանների կոնտակտի տիրույթը ընդունվում է անհայտ և այն որոշվում է խնդրի լուծման ընթացքում։ Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմ և Բեսսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք-հավասարումներ։ Զույգ շարք-հավասարումների լուծումները հանգեցված են քվազիլովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։ Բերված թվային օրինակներում որոշվում է կոնտակտի տիրույթի չափը և լարումները կոնտակտների մակերևույթների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *З. А. Мартиросян*. Известия АН АрмССР, Механика, т. 32, № 2 (1979). [2] *Б. Л. Абрамян*. ДАН АрмССР, т. 19, № 1 (1954). [3] *С. П. Тимошенко*. Теория упругости, ОНТИ, М., 1937. [4] *I. C. Cooke, C. I. Tranter*. Journal of Mech. and Appl. Math., vol. 12, part 2, August, Oxford, (1959). [5] *А. А. Баблоян, А. П. Мелконян*. Известия АН АрмССР, Механика, т. 22, №5 (1969).