ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 4

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

Г. А. Назарян

# О соотношениях некоторых сложностных характеристик множеств булевых функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8.VII 1980)

Будем предполагать фиксированным некоторое положительное рациональное число $\varepsilon$, меньше 1/2, относительно которого расматриваются все приближения булевых функций. Всюду далее б. ф. есть сокращение для выражения „булева функция“, о. р. ф.—„общерекурсивная функция„, ч. р. ф. — "частично реукрсивая функция", н. ч. —"натуральное число". Определим н. ч. как слова в алфавите $\{0, 1\}$, так же как в ([1]). Длину н. ч. $x$ будем обозначать посредством $l(x)$. Если $S$—конечное множество н. ч., то через $d(S)$ либо через $\overline{\overline{S}}$ будем обозначать мощность этого множества. Размерность б. ф. будем указывать верхним индексом, так что если $F$ есть б. ф. размерности $n$ (т. е. слово в $\{0, 1\}$ длины $2^n$, содержащее информацию о всех значениях $F$), то будем писать $F^n$. Букву $B$ будем использовать для обозначения множества всех б. ф., букву $M$—в качестве переменной для обозначения произвольного рекурсивно перечислимого множества б. ф. (при этом посредством $M^n$ будем обозначать множество размерности $n$, принадлежащих $M$), букву $C$—для обозначения н. ч., букву $H$—для обозначения двухместных о. р. ф., буквы $T$ и $t$ -для обозначения одноместных о. р. ф. Будем говорить, что два слова $a$ и $a'$ в $\{0, 1\}$ одинаковой длины $\varepsilon$—равны (и писать $a \overset{\varepsilon}{=} a'$), если доля компонент, в которых $a$ и $a'$ отличаются, не превосходит $\varepsilon$. Множество векторов той же длины, что и $a$, $\varepsilon$—равных $a$, как обычно называем шаром радиуса $\varepsilon$ с центром $a$. Символы $\prec\cdot$ ,и $\asymp$ при обозначении отношений между функциями используются в следующем смысле: $(\alpha)(n) \prec\cdot \beta(n) \equiv \exists C \forall_n (\alpha(n) \leq \beta(n) + C)$; $\alpha(n) \asymp \beta(n) \equiv (\alpha(n) \prec\cdot \beta(n)) \& (\beta(n) \prec\cdot \alpha(n))$.

В качестве алгоритмического языка рассматривается некоторая аддитивно оптимальная нумерация $\varphi$ одноместных ч. р. ф. ([2,3]), т. е.

такая нумерация, для которой выполняется следующее условие: для любой нумерации одноместных ч. р. ф. $\psi$ можно указать о. р. ф. $\alpha$ такую, что $(\varphi_{\alpha(i)} = \psi_i)\&(l(\alpha(l)) < \cdot\, l(l))$. Будем говорить, что программа $p$ вычисляет б. ф. $F^n$ (и писать $\varphi_p = F^n$), если $\forall x[l(x) = n) \supset (\varphi_p(x) = F^n(x))]$, и говорить, что программа $p$ $\varepsilon$—вычисляет $F^n$, если программа $p$ вычисляет б. ф. $\bar{F}^n$, $\varepsilon$—равную $F^n$. Для нумерации $\varphi$ зафиксируем последовательность $\Phi$, сигнализирующих ([4]), и с каждой $\Phi$ ассоциируем ч. р. ф. $\hat{\Phi}$ такую, что $\forall_n(\hat{\Phi}_p(n) = \max_{l(x)=n} \Phi_p(x))$.

Нижеследующие обозначения, содержащие $\varepsilon$, при $\varepsilon = 0$ соответствуют случаю точных вычислений. Посредством $L^{\varepsilon}_{M}$ и $L^{\varepsilon,T}_{M}$ будем обозначать следующие функции Шеннона для множества $M$:

$$L^{\varepsilon}_{M}(n) = \max_{F^n \in M}\{\min l(p) | \varphi_p \underset{\varepsilon}{=} F^n\},\quad L^{\varepsilon,T}_{M}(n) = \max_{F^n \in M}\{\min l(p) | (\varphi_p \underset{\varepsilon}{=} F^n)\&(\Phi_p(n) < T(n))\}.$$

Для всякой о. р. ф. $g$ о. р. ф. $T$ будем называть условной мажорантой (или, кратко, мажорантой) вычисления $g$, если можно указать программу $p$, вычисляющую $g$ (т. е. $\varphi_p = g$) такую, что $\forall^{\infty}_n(\hat{\Phi}_p(2^n) = \max_{F^n \in B} \Phi_p(F^n) < T(n))$.

Под $\varepsilon$-алгоритмом синтеза ($\varepsilon$—а. с.) будем понимать произвольную о. р. ф. Областью применимости $\varepsilon$—а. с. $A$ называем множество б. ф. $D^A = \{F | \varphi_{A(F)} \underset{\varepsilon}{=} F\}$. Говорим, что $A$ есть $\varepsilon$—а. с. для $M$, если $M \subseteq D^A$. Функцией Шеннона множества $M$ по $\varepsilon$—а. с. $A$ называем функцию $L^{\varepsilon}_{M\,A}(n) = \max_{F^n \in M} l(A(F^n))$. $\varepsilon$—а. с. $A$ называем оптимальным для $M$, если $L^{\varepsilon}_{M\,A}(n) = L^{\varepsilon}_{M}(n)$.

О. р. ф. $t$ называем ограничителем $\varepsilon$—вычисления $M$ (или, кратко, $\varepsilon$—ограничителем $M$), если выполнено $L^{\varepsilon,t}_{M}(n) = L^{\varepsilon}_{M}(n)$.

Множество $\bar{M}$ б. ф. называем $\varepsilon$—приближением $M$, если для всякой б. ф. $F^n$ из $M$ можно указать б. ф. $\bar{F}^n$ из $\bar{M}$ такую, что $F^n \underset{\varepsilon}{=} \bar{F}^n$. $\varepsilon$—приближение $\bar{M}$ множества $M$ называем оптимальным $\varepsilon$—приближением $M$, если $l(d(M^n)) = l(d(\bar{M}_n))$.

$\varepsilon$—мощностью конечного множества $\Pi$ б. ф. называем мощность минимального по мощности $\varepsilon$—приближения $\Pi$; $\varepsilon$—мощность $\Pi$ будем обозначать через $d^{\varepsilon}(\Pi)$.

В ([5]) было показано, что сложность $\varepsilon$—а. с. для множеств б. ф. тесно связана со сложностью разбиений класса $B$ всех б. ф., ассоциированных с этими множествами, эти разбиения были названы дизъюнктами. Напомним соответствующие определения. Разбиение $\mathfrak{Q}$ множества $B$ всех б. ф. называем конструктивным $\varepsilon$—дизъюнктом множества $M$ б. ф., если для всех $n$ оно является разбиением $\mathfrak{Q}_n$ множества $B_n$ всех б. ф. размерности $n$, и б. ф. из $M_n$, принадлежащие произвольному классу разбиения, содержатся в некотором шаре радиуса $\varepsilon$, центр которого может быть эффективно указан по элементам класса. $\varepsilon$—дизъюнкт $\mathfrak{Q}$ множества $M$ называем оптимальным, если для мощности $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ разбиения $B_n$ выполнено соотношение $l(\overline{\mathfrak{Q}}_n)=l(d^{\varepsilon}(M_n))$.

Будем рассматривать дизъюнкты, задаваемые общекурсивными характеристическими функциями ($f_{\mathfrak{Q}}$ называем характеристической функцией дизъюнкта $\mathfrak{Q}$, если соотношение $f_{\mathfrak{Q}}(F^n)=f_{\mathfrak{Q}}(\overline{F}^n)$ имеет место в том и только том случае, когда $F^n$ и $\overline{F}^n$ принадлежат одному классу разбиения $\mathfrak{Q}_n$).

Введем обозначения, связанные с вышеперечисленными характеристиками множеств б.ф. Пусть

$Alg$ обозначает класс пар $(\theta, M)$ где $\theta$—мажоранта вычисления некоторого оптимального $\varepsilon$—а. с. для $M$,

$Char$—класс пар $(\theta, M)$, где $\theta$—мажоранта вычисления характеристической функции некоторого оптимального $\varepsilon$—приближения $M$,

$Dis$—класс пар $(\theta, M)$, где $\theta$—мажоранта вычисления характеристической функции некоторого оптимального $\varepsilon$—дизъюнкта множества $M$,

$Bnd$—класс пар $(\theta, M)$, где $\theta$—мажоранта вычисления $\varepsilon$—ограничителя $M$.

Если $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$—какие-либо из указанных классов, то запись $\Gamma_2\leqslant\Gamma_1$ используем для обозначения следующего факта: существует о. р. ф. $H$ такая, что для любого перечислимого множества $M$ б. ф., и для любой $\theta$ такой, что $(\theta, M)\in\Gamma_1$, можно указать $\theta^*$ такую, что $(\theta^*, M)\in\Gamma_2$ и $\forall_n^\infty(\theta^*(n)\leqslant H(n, \theta(n)))$.

Запись $\Gamma_1<\Gamma_2$ будем использовать для обозначения факта, что $(\Gamma_1\leqslant\Gamma_2)\&\neg(\Gamma_2\leqslant\Gamma_1)$.

Говорим, что классы $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ не сравнимы, если $\neg(\Gamma_1\leqslant\Gamma_2)\&\neg(\Gamma_2\leqslant\Gamma_1)$.

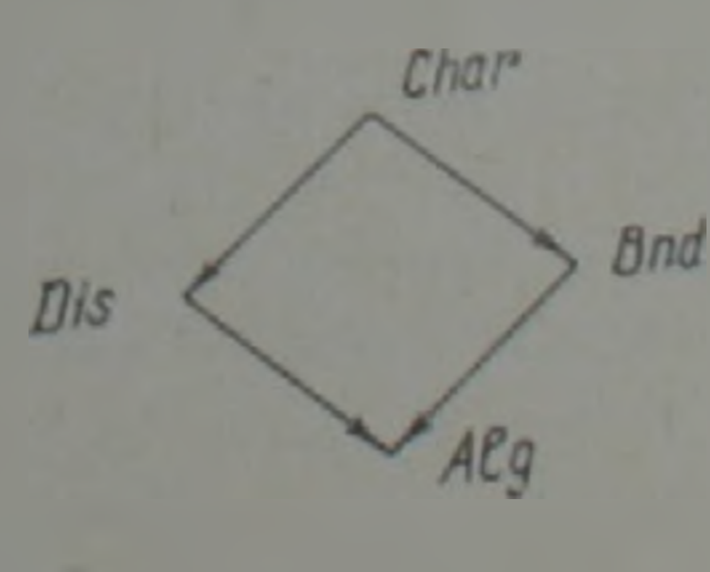
Следующая теорема устанавливает соотношения между вышеопределенными классами.

Теорема. (а) $Char\geqslant Bnd$, $Char\geqslant Dis$;

(б) $Alg\leqslant Bnd$, $Alg\leqslant Dis$;

(в) $Bnd$ и $Dis$ *не сравнимы.*

Соотношения классов, устанавливаемые в теореме, можно изобразить при помощи следующей диаграммы, где последовательность



из одной или двух стрелок идет от обозначения класса $\Gamma_1$ к обозначению класса $\Gamma_2$ в том и только том случае, если $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$.

Как видно из диаграммы, оптимальные алгоритмы синтеза для множества являются относительно самыми простовычислимыми из рассмотренных характеристик, и для некоторых множеств б. ф. могут быть существенно проще ограничителей, дизъюнктов и приближений этих множеств.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность И. Д. Заславскому за постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр
Министерства автомобильного транспорта
Армянской ССР

Հ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

## Բուլյան ֆունկցիաների բազմությունների բարդության որոշ բնութագրիչների հարաբերությունների մասին

*Համեմատվում են բուլյան ֆունկցիաների ռեկուրսիվ թվարկելի բազմությունների բնութագրիչներ, որոնք սահմանվում են այդ բազմությունների անդամների մոտավոր ներկայացման և մոտավոր հաշվարկման տերմիններով։*

*Տվյալ բազմության համար դիտարկվում են բնութագրիչներ. բազմությանը պատկանող բուլյան ֆունկցիաների մոտավոր հաշվարկման ծրագրեր սինթեզող ալգորիթմներ, բազմության հաշվարկման սահմանափակիչներ, բազմության դիզյունկտներ, բազմության մոտարկումներ։*

*Հիմնավորվում է նշված բնութագրիչների որոշ մասնակի կարգավորվածություն՝ ըստ նրանց բարդության։*

*Մասնավորապես պարզվում է, որ սինթեզող ալգորիթմները դիտարկված բնութագրիչներից համեմատաբար ամենապարզն են։*

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. К. Звонкин, Л. А. Левин,* УМН, т. 25, № 6 (1970). [2] *А. Н. Колмогоров,* Проблемы передачи информации, т. 1, № 1 (1965). [3] *И. Д. Заславский,* Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 16 (1969). [4] *М. Блюм,* в сб.: Проблемы математической логики, Мир, М., 1970. [5] *Г. А. Назарян,* ДАН АрмССР, т. 69, № 2 (1979).