ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 4

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

С. А. Антонян

Теорема Тихонова в категории топологических групп преобразований

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 19/VI 1980)

В настоящей работе классическая теорема Тихонова о вложении тихоновского пространства бесконечного веса в куб того же веса распространяется на категорию топологических (или непрерывных) групп преобразований, называемых также G-пространствами. Приводится эквивариантный аналог известной теоремы о том, что всякое p-паракомпактное пространство замкнуто вкладывается в произведение некоторого бикомпакта и метризуемого пространства. В качестве следствий получаются утверждения о существовании бикомпактного G-расширения того же веса, о совпадении классов абсолютных экстензоров и абсолютных ретрактов для топологических групп преобразований и теорема о множестве H-неподвижных точек.

Здесь мы придерживаемся терминологии, принятой в теории топологических групп преобразований ([1–6]).

Всюду в дальнейшем группой называем мультипликативную хаусдорфовую топологическую группу, а пространством—топологическое пространство.

Пусть X—бикомпактное, а (Y, ρ)—метрическое пространство. Через $C(X, Y)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений $f: X \to Y$, взятое с метрикой супремума ρ^*, т. е. $\rho^*(f, \varphi) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), \varphi(x))$ для $f, \varphi \in C(X, Y)$.

Лемма 1. *Пусть G—любая группа, X—бикомпактное G-пространство, а (Y, ρ)—метрическое пространство. Тогда на метрическом пространстве $(C(X, Y), \rho^*)$ определяется непрерывное изометрическое действие группы G согласно формуле*

$$(g, f) \to gf; \qquad (gf)(x) = f(g^{-1}x),$$

где $g \in G$, $f \in C(X, Y)$, $x \in X$.

Причем это действие будет линейным, если Y—линейное пространство.

Доказательство — простая проверка.

Следующая простая теорема является ключевой.

Теорема 1. *Пусть G бикомпактная группа. Тогда всякое бикомпактное метризуемое G-пространство X эквиморфно вкладывается в линейное изометрическое G—пространство $C(X, \boldsymbol{R})$.*

Для доказательства нужно взять инвариантную (относительно действия группы G) метрику ρ на G—пространстве X (существование которой обеспечивается бикомпактностью группы G ([3], стр. 5)) и определить искомый эквиморфизм формулой

$$i(x)(y) = \rho(x, y) \text{ для всех } x, y \in X.$$

Теорема 2. *Пусть G бикомпактная группа. Тогда для всякого метризуемого бикомпактного G—пространства X на топологической степени $\boldsymbol{R}^\infty$ существуют такие структуры банахова пространства* и действие группы G, что*

a) *действие группы G на $\boldsymbol{R}^\infty$ линейно и непрерывно,*

b) *куб I^∞ ($I = [0, 1]$) является выпуклым инвариантным подмножеством линейного G—пространства $\boldsymbol{R}^\infty$,*

c) *X эквиморфно вкладывается в I^∞.*

Выведем теорему 2 из теоремы 1.

Пусть $j: X \to C(X, \boldsymbol{R})$ эквиморфное вложение из теоремы 1. В силу линейности и непрерывности действия группы G на пространстве $C(X, \boldsymbol{R})$ замкнутая выпуклая оболочка V инвариантного множества $j(X)$ тоже инвариантна в $C(X, \boldsymbol{R})$, а в силу бикомпактности множества $j(X)$ и полноты пространства $C(X, \boldsymbol{R})$ множество V — тоже бикомпактно.

Если X—бикомпакт счетного веса, то легко понять, что банахово пространство $C(X, \boldsymbol{R})$ и выпуклый компакт V—бесконечномерны. Поэтому, согласно теореме Аренса—Кадеца ([4], стр. 189) существует гомеоморфизм d сепарабельного банахова пространства $C(X, \boldsymbol{R})$ на счетную степень прямой $\boldsymbol{R}^\infty$. Компакт $d(V)$ будучи гомеоморфным образом бесконечномерного выпуклого подкомпакта V банахова пространства $C(X, \boldsymbol{R})$ по теореме Келлера ([4], стр. 100) гомеоморфен гильбертову кубу I^∞, канонически лежащему в степени $\boldsymbol{R}^\infty$. Зафиксируем некоторый гомеоморфизм $r: d(V) \to I^\infty$. По теореме Кли ([14]), этот гомеоморфизм можно продолжить до некоторого автогомеоморфизма q пространства $\boldsymbol{R}^\infty$. Положим $i = q \circ d$. Ясно, что $i: C(X, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^\infty$—гомеоморфизм, отображающий выпуклый компакт V, на куб I^∞. Определим на пространстве $\boldsymbol{R}^\infty$ структуру линейного топологического пространства и действие группы G таким образом, чтобы гомеоморфизм $i: C(X, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^\infty$ превратился в линейный эквиморфизм линейных G—пространств. Другими словами, с помощью гомеоморфизма i с линейного G—пространства $C(X, \boldsymbol{R})$ на пространство $\boldsymbol{R}^\infty$ перенесем структуру банахова пространства и непрерывное и линейное действие группы G. Тогда куб I^∞ будет инвариантным выпуклым подмножеством линейного G—пространства $\boldsymbol{R}^\infty$ в силу инвариант-

---

* Разумеется, согласованная с топологией произведения $\boldsymbol{R}^\infty$.

ности и выпуклости множества V в $C(X, \boldsymbol{R})$, а отображение $i\,j: X \to I^\tau$ является эквиморфизмом, как композиция эквиморфизмов. Таким образом, в случае бикомпакта X бесконечного веса теорема 2 доказана. Если же X бикомпакт конечного веса, т. е. конечный бикомпакт, то ясно, что пространство $C(X, \boldsymbol{R})$ гомеоморфно евклидову пространству $\boldsymbol{R}^n$ (где $n = |X|$ — мощность множества X), а множество V — кубу I^{n-1}. Взяв произведение линейного G—пространства $\boldsymbol{R}^n$ и тривиального G—пространства $\boldsymbol{R}^\tau$, мы получим искомое линейное G—пространство $\boldsymbol{R}^\tau$.

С помощью теоремы 2 доказывается более общая

Теорема 3. *Пусть G бикомпактная группа. Тогда для всякого тихоновского G—пространства X бесконечного веса τ на топологической степени $\boldsymbol{R}^\tau$ существуют такие структура локально выпуклого линейного пространства и действие группы G, что*

d) действие группы G на $\boldsymbol{R}^\tau$ линейно,

e) куб I^τ является выпуклым инвариантным подмножеством линейного G—пространства $\boldsymbol{R}^\tau$.

f) X эквиморфно вкладывается в I^τ.

Замечание 1. *Из условий* в) *и* е) *теорем 2 и 3 и из одного результата автора* (²) *следует, что фигурирующие в этих теоремах G—пространства I^τ и I^τ являются абсолютными экстензорами для категории N^G всех нормальных G—пространств, и тем более—для категории B^G—всех бикомпактных хаусдорфовых G—пространств.*

Следствие 1. *При бикомпактной группе G любое тихоновское G—пространство обладает бикомпактным G—расширением того же веса.*

Это следствие улучшает результат де Вриса (⁴), который доказал, что при локально бикомпактной группе G любое тихоновское G—пространство X обладает бикомпактным G—расширением X' веса $w(X') \leqslant \max\{w(X), w(G)\}$.

Далее, заметим, что в отличие от классической теоремы Тихонова о вложении, фигурирующие в теореме 3 G—пространства $\boldsymbol{R}^\tau$ и I^τ зависят от вкладываемого в них G—пространства X. Однако имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть G—локально бикомпактная группа со счетной базой. Тогда для любого бесконечного кардинала τ на степени $\boldsymbol{R}^\tau$ существуют такие структура локально выпуклого линейного пространства и действие группы G, что выполняются условия* d) *и* e) *теоремы 3 и следующее условие*

f′) любое тихоновское G—пространство X веса $\leqslant \tau$ эквиморфно вкладывается в I^τ.

Теорема 5. *Пусть τ бесконечный кардинал, а G—бикомпактная группа веса $\leqslant \tau$. Тогда на степени $\boldsymbol{R}^\tau$ существуют такие структура локально выпуклого линейного пространства и дей-*

ствие группы G, что выполняются условия d) и e) теоремы 3 и условие f') теоремы 4.

В отличие от теоремы 2 и 3, фигурирующие в теоремах 4 и 5 G—пространства $\mathbf{R}^\tau$ и I^τ универсальны в том смысле, что они не зависят от вкладываемого в них G—пространства X.

Теорема 6. *Пусть группа G либо бикомпактна, либо локально бикомпактна и обладает счетной базой. Тогда для всякого p—паракомпактного* G—пространства X бесконечного веса τ существуют такие метризуемое локально выпуклое линейное G—пространство M и структура локально выпуклого линейного G—пространства на степени $\mathbf{R}^\tau$, что*

g) куб I^τ является выпуклым инвариантным множеством в $\mathbf{R}^\tau$,

h) X эквиморфно и замкнуто вкладывается в произведение G—пространств $I^\tau \times M$,

i) в случае бикомпактной группы G произведение $I^\tau \times M$ является абсолютным экстензором для класса P^G—всех p-паракомпактных G—пространств.

Для данной группы G и произвольного класса K топологических пространств через K^G обозначим класс всех таких G—пространств X, что X, рассматриваемое как топологическое пространство, принадлежит классу K.

Ниже всюду предполагается, что K один из следующих важных классов:

C—класс всех метризуемых бикомпактов,

B—класс всех бикомпактов,

P—класс всех p-паракомпактов.

Из теорем 2, 3, 6 и замечания 1 легко вывести

Следствие 2. *Пусть G бикомпактная группа. Тогда для класса K^G свойство его объекта быть абсолютным (окрестностным) ретрактом эквивалентно свойству быть абсолютным (окрестностным) экстензором.*

Следствие 3. *Пусть G бикомпактная группа. Тогда всякий объект класса K^G можно эквиморфно и замкнуто вложить в некоторый абсолютный ретракт того же класса K^G.*

Следующая теорема дает простое необходимое условие для того, чтобы G—пространство Y являлось абсолютным (окрестностным) ретрактом.

Теорема 7. *Пусть группа G либо бикомпактна либо локально бикомпактна и обладает счетной базой. Тогда для всякого абсолютного (окрестностного) ретракта Y класса K^G и для всякого непустого подмножества H группы G множество H—неподвижных точек—$Y[H] = \{y \in Y;\ hy = y;\ \forall h \in H\}$—является абсолютным (окрестностным) ретрактом для класса K.*

---

* Паракомпактное пространство называется p—паракомпактным, если оно совершенно отображается на некоторое метризуемое пространство.

Замечание 2. *В случае бикомпактной группы G теорема 7 для класса B^0 ранее была получена Ю. М. Смирновым* [3].

Автор сердечно благодарен проф. Ю. М. Смирнову за руководство.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Ս. Հ. ԱՆՏՈՆՅԱՆ

Տիխոնովի թեորեմը ձևափոխությունների տոպոլոգիական խմբերի կատեգորիայում

Հոդվածում տիխոնովյան տարածությունը նույն կշռի խորանարդի մեջ ներդնելու վերաբերյալ Տիխոնովի դասական թեորեմը տարածվում է ձևափոխությունների տոպոլոգիական խմբերի վրա։ Բերվում է նաև Հեռնյալ հայտնի թեորեմի էկվիվարիանտ տարբերակը. կամայական G—պարակոմպակտ տարածությունը կարելի է փակ կերպով ներդնել ինչ-որ բիկոմպակտի և մետրիզացվող տարածության արտադրյալում։ Որպես մասնավոր հետևանքներ ստացվում են միևնույն կշռի բիկոմպակտ G—ընդլայնման գոյության, ձևափոխությունների տոպոլոգիական խմբերի համար բացարձակ ռետրակտների և բացարձակ էքստենզորների դասերի համընկնման վերաբերյալ պնդումները և H—անշարժ կետերի բազմության վերաբերյալ թեորեմը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Антонян*, ДАН АрмССР, т. 69, № 5 (1979). [2] *С. А. Антонян*, Изв. АН АрмССР, Мат., т. 15, № 5 (1980). [3] *Ю. М. Смирнов*, Мат. сб., т. 98, № 140 (1975). [4] *C. Bessaga, A. Pełczyński*, Selected topics in infinite-dimensional topology, Warszawa, 1975. [5] *R. Palais*, Mem. Amer. Math. Soc., № 36 (1960). [6] *J. de Vries*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. math., astr., phys., vol. 26, № 3 (1978).