ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 4

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

А. С. Машурян

О классе примитивно рекурсивных функций, определимых на конечных моделях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/VI 1980)

Самой общей математической структурой, на которой возможно моделировать свойство индукции и, следовательно, рассматривать рекурсивные схемы, является алгебра с одной унарной операцией и с одним образующим, определенная в ([1-3]) под названием «индукционная модель». В этой статье мы будем такую алгебру называть унаром. Введенное в ([1]) понятие типа индукционной модели переименуем в характеристику унара.

Исследования ([1, 2]) приводят к следующим трем основным вопросам:

1) Каков класс всех арифметических функций, определимых на унаре любой характеристики?

2) Каков класс всех унаров, на которых определима данная арифметическая функция?

3) Каков класс всех арифметических функций, определимых на унарах конечной характеристики?

При этом, в отличие, например, от ([4]) здесь функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется арифметической, если при изменении аргументов на множестве натуральных чисел y принимает также натуральные значения. Исчерпывающий ответ на первый из поставленных вопросов в классе примитивно рекурсивных функций дается теоремами 6 и 6' из ([2]). Ответ на второй вопрос для некоторых важных функций содержится в ([1, 2]). Настоящая статья, в основном, посвящена исследованию третьего вопроса.

Теорема 1. *Для того, чтобы арифметическая функция $y = f(x)$ была определима на унаре конечной характеристики (m, n), необходимо и достаточно выполнение требования: $f(x+kn) - f(x)$ делится на n при любом $m \leq x < m+n$ и произвольном натуральном k.*

Доказательство. Пусть M—произвольный унар конечной характеристики (m, n). Назовем натуральные числа t и u M-равными, если при гомоморфизме $h: w \to M$ (существующем и единственном по теореме 2 из [2]) $h(t) = h(u)$. Функция $f(x)$ определена на M [2], если при M-равных t, u числа $f(t)$, $f(u)$ также M-равны. Если $0 \leqslant z < m$, то $h(z) = z$; если же $z > m$ и $z = m + v + kn$, где $0 \leqslant v < n$, а $k \in w$, то $h(z) = m + v$. Следовательно, два натуральных числа M-равны тогда и только тогда, когда их разность делится на n. Пусть числа t, u M-равны. Возможны два случая: 1) $t < m$, тогда $u < m$ и $t = u$, а следовательно, $f(t) = f(u)$; 2) $t \geqslant m$, тогда $u \geqslant m$, $t = m + v + k_1 n$, $u = m + v + k_2 n$, где $0 \leqslant v < n$, k_1, $k_2 \in w$. Теперь доказательство теоремы 1 очевидно.

Простым следствием из этой теоремы является следующий результат, который существенно использовался в [1] и [2].

Следствие 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была определимой на любом унаре (была ИОФ [2]), необходимо и достаточно, чтобы при любых натуральных m и $n > 0$ число $f(m+n) - f(m)$ делилось на n.

Для доказательства достаточно отметить, что для любой пары m, $n > 0$ натуральных чисел существует унар характеристики (m, n).

Следствие 2. Любая арифметическая функция определима на любом унаре характеристики $(m, 1)$ при произвольном натуральном m. Имея в виду последний результат, введем следующее определение.

Определение. (а) Унар характеристики типа $(m, 1)$ называется тривиальным; (б) арифметическая функция, определимая хотя бы на одном нетривиальном унаре конечной характеристики, называется конечно определимой функцией.

В [1,2] показано, что функции $x + y$, $x \cdot y$, x^y, c^x (c—константа) являются конечно определимыми. Рассмотрим усеченную разность $x \dot{-} y$, при этом полагаем:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y \\ 0, & \text{если } x < y \end{cases}$$

Используя теорему 1, легко проверить, что функция $x \dot{-} y$ не определима ни на одном нетривиальном унаре конечной характеристики. При этом надо иметь в виду следующее утверждение из [2]: для того, чтобы функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была определимой на унаре M, необходимо и достаточно, чтобы она была определимой на M по каждой переменной при фиксированных значениях остальных перемечных.

Последний пример показывает, что не все элементарные по Кальмару [5] функции конечно определимы. Тем не менее будет показано (теорема 3), что один интересный подкласс (класс F) [6] класса элементарных по Кальмару функций содержится в классе конечно определимых функций.

Замечая, что, по определению, совокупность всех конечно определимых функций является максимальным классом арифметических функций, для рассмотрения которого достаточен потенциально бесконечный натуральный ряд, мы можем теперь утверждать, что *без перехода к бесконечному натуральному ряду мы не в состоянии задать даже класс элементарных функций*.

Обозначим через PI класс всех конечно определимых функций — это класс всех арифметических функций, каждая из которых определима на конечном унаре.

Теорема 2. *Класс PI замкнут относительно операции подстановки.*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 1 и следующую очевидную лемму.

Лемма. *Если функция $f(x)$ определима на нетривиальном унаре конечной характеристики (l_1, u_1), и функция $g(x)$ на аналогичном унаре конечной характеристики (l_2, u_2), то $f(x)$ и $g(x)$ определимы на унаре характеристики (m, n), где $m \geq l_1$, $m \geq l_2$, а n — общее кратное чисел u_1, u_2.*

Пусть F — класс арифметических функций [4], содержащий функции $x \dot{-} y$, xy, x^y и замкнутый относительно операции подстановки. Учитывая теорему 2 и тот факт, что функции $x \dot{-} y$, xy, x^y и $x \dot{-} 1$ конечно определимы [2], получаем следующее утвеждение:

Теорема 3. *Класс F строго содержится в классе PI.*

Ереванский государственный
университет

Ա. Ս. ՄԱՇՈՒՐՅԱՆ

Վերջավոր հանրահաշիվների վրա որոշելի թվաբանական ֆունկցիաների դասի մասին

Հոդվածում ուսումնասիրված է այն թվաբանական առույթների դասը, որոնցից յուրաքանչյուրի մակարկմամբ սահմանելու համար բավական է ունենալ բնական շարքի մի վերջավոր հատված։ Ցույց է տրված, որ այդ դասը փակ է բաղադրման գործողության նկատմամբ և ակնարկված է նրա դիրքը թվաբանական առույթների այլ հայտնի դասերի նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Машурян*, ДАН АрмССР, т. 59, № 4 (1974). [2] *А. С. Машурян*, ДАН АрмССР, т. 69, № 4 (1979). [3] *Л. Генкин*, О математической индукции, Физматгиз, М., 1962. [4] *А. И. Мальцев*, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, М., 1965. [5] *А. Гжегорчик*, БКС, Проблемы математической логики, Мир, М., 1970. [6] *Г. Биркгоф*, *Т. Барти*, Современная прикладная алгебра, Мир, М., 1976