

УДК 517.232. 235

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

Граничные свойства некоторых весовых классов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 4/VI 1980)

Пусть $R_+^{n+1} = \{(x_1, x); x \in R^n, x_1 > 0\}$ — полупространство, $1 < p < \infty$, $h(t)$, $t > 0$, — неотрицательная монотонная функция. Через $W_{p,h}^k(R_+^{n+1})$ мы обозначим пространство обобщенных функций $f(x_1, x)$, для которых

$$N_{p,h}^k = \left(\int_{R^n} \int_0^\infty |f(x_1, x)|^p h(x_1) dx dx_1 \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{R^n} \int_0^\infty \left| \frac{\partial^\alpha f(z)}{\partial z^\alpha} \right|^p h(x_1) dx dx_1 \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $z = (x_1, x)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ — мультииндекс, а $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$. На весовую функцию $h(t)$ обычно ставят ограничение

$$\int_0^\infty h(t) dt < \infty, \quad (1)$$

так как в противном случае все функции из $W_{p,h}^k$ будут стремиться к нулю при приближении к границе. На $h(t)$ естественно следует наложить ограничение

$$\int_0^\infty h^{\frac{1}{1-p}}(t) dt < \infty. \quad (2)$$

Если приведенный выше интеграл расходится, то существует функция $f \in W_{p,h}^k$, которая стремится к бесконечности при приближении к границе ∂R_+^{n+1} . В дальнейшем всегда предполагается, что интегралы (1) и (2) сходятся и кроме этого $h(2t) \sim h(t)$, при $t \rightarrow 0$. В настоящей статье рассматриваются такие W , для которых $k=1$.

Из сходимости интеграла (2) следует, что любая функция $f(x_1, x) \in W_{p,h}^1$ почти всюду на ∂R_+^{n+1} имеет нормальные граничные значения, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x)$$

для почти всех $x \in R^n$. После этого замечания возникают следующие два вопроса: можно ли утверждать нечто большее, чем существование граничных значений почти всюду, и второй вопрос — описать след функции из $W_{p,h}^1$ на границе ∂R_+^{n+1} . Обе задачи были поставлены давно, и их решению посвящены многие работы. Оказалось, что можно дать положительный ответ на первый вопрос. Первой работой в этом направлении была статья А. Бёрлинга ⁽¹⁾, доказавшего, что гармоническая $f \in W_2^1(R_+^2)$ имеет конечные нормальные граничные значения всюду на ∂R_+^2 , кроме некоторого множества, логарифмическая емкость которого равна нулю. Дени ⁽²⁾ обобщил результат А. Бёрлинга для пространств $W_2^1(R_+^{n+1})$, $n \geq 1$, показав, впрочем, что гармоничность не играет никакой роли в указанной выше задаче. Следующий шаг был сделан Л. Карлесоном ⁽³⁾, который рассматривал пространства $W_{2,\alpha}^1(R_+^2)$, $0 < \alpha < 1$. Г. Валлин ⁽⁴⁾ обобщил результаты Л. Карлесона на многомерный случай. Оказывается, что вышеприведенная задача приводится к исследованию граничных свойств функции, допускающих представление

$$f(x) = \int_{R^{n+1}} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-1}} dy, \quad (3)$$

где

$$\int_{R^n} \int_0^\infty |g(x_1, x)|^p h(x_1) dx dx_1 < \infty.$$

Функции, допускающие представление (3), мы обозначим через $L_{p,h}^1$. Важный шаг в исследовании граничных свойств функции из $L_{p,h}^1$ был сделан в работе Ю. Решетняка ⁽⁵⁾. У Ю. Решетняка $1 < p < \infty$ и весовая функция $h(t) \equiv 1$. Исследованию граничных свойств функции из $L_{p,h}^1$ посвящена также работа автора ⁽⁶⁾. В статье ⁽⁶⁾ дано полное описание граничных свойств классов $L_{p,h}^1$ при самых общих ограничениях на весовую функцию $h(t)$ (предполагалась только монотонность $h(t)$). Однако исследование пространств $L_{p,h}^1$ не всегда дает полную информацию о граничных свойствах функции из $W_{p,h}^1$. Эти два пространства совпадают только для таких весовых функций, для которых

$$\sup_{t>0} \left(\frac{1}{t^{1/p-1}} \int_0^t \frac{dx}{h^{1/p-1}(x)} \right) < \infty. \quad (4)$$

С помощью новых интегральных представлений для функции из $W_{p,h}^1$ удалось доказать более точные результаты о граничных свойствах.

Для формулировки нашей теоремы приведем одно определение. Для любого измеримого множества $E \subset \partial R_+^{n+1}$ положим

$$C_n(E) = \left\{ \inf_{\mu \ll E} \left| \int_0^\infty \int_{R^n} \frac{d\mu(y)}{\prod_{i=1}^n (t^2 + (x_i - y_i)^2)} \right|^q \frac{t^{nq}}{h^{p-1}(t)} dt dx_1 \dots dx_n \right\}^{-1},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$, $\mu \ll E$ означает, что μ — вероятностная мера, сосредоточенная в E .

Теорема 1. Любая функция $f \in W_{p,n}^1(R_+^{n+1})$ всюду на ∂R_+^{n+1} кроме некоторого множества E , для которого $C_n(E) = 0$, имеет нормальные граничные значения.

При решении второй задачи, естественно, возникает вопрос о нахождении таких классов функций, в терминах которых можно полностью описать след функции из $W_{p,n}^1(R_+^{n+1})$ на границе ∂R_+^{n+1} . Важным шагом в этом направлении явились работы Е. Гальярдо ⁽⁷⁾ и Н. Ароншайна, К. Смита ⁽⁸⁾. Для пространств W_p^s эта задача была решена в работах Е. Стейна ⁽⁹⁾, Н. Ароншайна, Ф. Мулла, П. Шептицкого ⁽¹⁰⁾, П. Лизоркина ⁽¹¹⁾, О. В. Бессова ^(12,13). Первое систематическое исследование весовых классов $W_{p,n}^s$ принадлежит Л. Д. Кудрявцеву ⁽¹⁴⁾. Результаты Л. Д. Кудрявцева сформулированы с точностью до произвольно малого $\varepsilon > 0$. Окончательные результаты для пространств $W_{p,n}^1$ были получены в статье П. Лизоркина ⁽¹⁵⁾. Отметим, что методы, развитые в указанных выше работах, позволяют полностью решить нашу задачу для весовых функций, удовлетворяющих условию (4).

Заметим, что существуют весовые функции $h(t)$, для которых имеет смысл говорить о граничных значениях, однако условие (4) не удовлетворяется. Следующая теорема дает возможность получить окончательные результаты именно для таких весовых функций. Приведенный ниже результат в несколько другой форме есть у Г. А. Калябина ⁽¹⁶⁾.

Теорема 2. Пусть $f(x_1, x) \in W_{p,n}^1$ и

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x) = F(x).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_{R^n} \left| \int_{|x_j| > u} e^{it_j x_j} F(x_1, \dots, x_n) dx_j \right|^p \frac{du}{h^{p-1}\left(\frac{1}{u}\right) \left(\int_u^\infty \frac{dt}{h^{p-1}(t)} \right)^p} \times$$

$$\times dx_1 \dots dx_{i-1} dt dx_{i+1} \dots dx_n < \infty. \quad (5)$$

Обратно, любая функция F , удовлетворяющая (5), является следом некоторой функции из $W_{p,h}^1$ на границе ∂R_+^{n+1} .

Мы скажем, что $f(x_1, x) \in W_{p,h}^1$, если она определена на R_+^{n+1} , дифференцируемая и

$$\sup_{(x_1, x) \in R_+^{n+1}} (|\text{grad } f(x_1, x)| h(x_1)) < \infty.$$

Для классов $W_{p,h}^1$ первый вопрос автоматически исчезает. Следующая теорема дает полный ответ на второй вопрос.

Теорема 3. Пусть $f(x_1, x) \in W_{p,h}^1$. Тогда

$$|f(0, x) - f(0, y)| \leq c \int_0^{|x-y|} \frac{dt}{h(t)},$$

где $c < \infty$. Обратно, если $F(x)$ имеет модуль непрерывности меньше $\int_0^{|x-y|} \frac{dt}{h(t)}$, то существует $f(x_1, x) \in W_{p,h}^1$ такая, что $f(0, x) = F(x)$.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՀԱՐՇԱԿՅԱՆ

Որոշ կշռային դասերի եզրային հատկություններ

Հոդվածում դիտարկվում են $W_{p,h}^1(R_+^{n+1})$ կշռային տարածությունները՝ լինթադրվում է, որ $h(t)$ կշռային ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$\int_0^1 h(t) dt < \infty, \quad \int_1^\infty h^{1-p}(t) dt < \infty$$

և $h(2t) \sim h(t)$, երբ $t \rightarrow 0$ ։ Քեորեմ է-ում ապացուցվում է, որ կամայական $f \in W_{p,h}^1(R_+^{n+1})$ ունի նորմալ եզրային արժեքներ ամենուրեք ∂R_+^{n+1} -ի վրա, բացառությամբ զրո ունակությամբ բազմությամբ։ Հաջորդ թեորեմը նվիրված է եզրային ֆունկցիայի նկարագրությանը։

Բերված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ եզրում որոշված ֆունկցիայի վրա, որոնց դեպքում այն հանդիսանում է $W_{p,h}^1(R_+^{n+1})$ դասին պատկանող որևէ ֆունկցիայի հետք ∂R_+^{n+1} -ի վրա։

Վերջին թեորեմում տրվում է $W_{p,h}^1$ դասի ֆունկցիայի հետքի լրիվ նկարագրությունը եզրի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. Beurling, Acta Math., vol. 72 (1940) ² J. Deny, Acta Math., vol. 82 (1950).
³ Л. Карлссон. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Мир, М., 1967.

1921. ⁴ *H. Walla*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 102 №3 (1965). ⁵ *Ю. Г. Решетняк*, Сиб. матем. журн., 13, 2 (1972). ⁶ *А. А. Вагнершакун*, Сиб. матем. журн., 5 (1971). ⁷ *E. Gagliardo*, Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 27 (1957). ⁸ *N. Aronszajn*, K. Smith, Ann. Inst. Fourier, vol. 11 (1961). ⁹ *E. M. Stein*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 67 (1961); vol. 68 (1962). ¹⁰ *N. Aronszajn*, *F. Mulla*, *P. Szeptycki*, Ann. Inst. Fourier, vol. 13, (1961). ¹¹ *П. И. Лизоркин*, ДАН СССР, т. 150, №5 (1963). ¹² *О. В. Бессов*, Труды Матем. ин-та АН СССР, 60 (1961). ¹³ *О. В. Бессов*, ДАН СССР, т. 126, № 6 (1959). ¹⁴ *Л. Д. Кудряцев*, Труды МИАН СССР, 55 (1959). ¹⁵ *П. И. Лизоркин*, ДАН СССР, т. 126, № 4 (1959), 703—706. ¹⁶ *Г. А. Калябин*, ДАН СССР, т. 227, № 2 (1976).