

УДК 519.852

МАТЕМАТИКА

А. Д. Туннев

Обобщение симплекс-метода

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 17/IV 1980)

В работе предлагается метод решения задачи линейного программирования, основанный на идее особого правила выбора не одного направляющего элемента, как это делается в симплекс-методе (¹), а одновременно нескольких элементов—направляющего вектора.

Алгебраической основой метода является обобщенная процедура жордановых исключений.

С геометрической точки зрения идея метода заключается в том, что от известного опорного плана переходим к плану задачи и от него к новому опорному плану и т. д. При каждом переходе значение целевой функции задачи увеличивается.

Пусть требуется максимизировать линейную функцию

$$- \sum_{j=m+1}^n x_{m+1,j}^0 x_j \quad (1)$$

при условиях

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n x_{ij}^0 x_j = x_{i0}^0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Перейдем к описанию метода.

1. Процедура перехода от опорного плана к плану.

1.1. Пусть $x_{m+1,j}^0 < 0$, $j \in K$, где $K = \{m+1, m+2, \dots, m+k\}$. Обозначим $x_i^0 = x_i^0(K) = (x_{i,m+1}^0, x_{i,m+2}^0, \dots, x_{i,m+k}^0)$, а его норму через $|x_i^0|$, $i = 1, 2, \dots, m+1$. Не меняя общности рассуждений, допустим, что

$$\theta_1 = \frac{x_{10}^0}{|x_1^0|} = \min_{i \neq m+1} \frac{x_{i0}^0}{|x_i^0|}, \quad (4)$$

для тех x_i^j , у которых по крайней мере одна компонента больше нуля. Здесь предполагаем, что $x_{i0}^j > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

1.2. Пусть x_i^j неотрицательный вектор (в противном случае на s -ом шаге, $s = 1, 2, \dots, s$ ($s \geq 2$)) определяем $K_s \subset K_{s-1}$ и переходим к п. 1.1; при $s = 1$, $K_0 = K$).

Полагаем

$$\begin{cases} x_{ij}^1 = \frac{x_{ij}^0}{\|x_i^0\|}, & j = 0, 1, \dots, n, \\ x_{ij}^1 = x_{ij}^0 + \alpha_i x_{ij}^0, & i = 1, j = 0, 1, \dots, n, \end{cases} \quad (5)$$

где $\alpha_i = \alpha_i(K) = -(x_i^0, x_i^1)$, $i = 2, 3, \dots, m+1$;

$x_i^1 = x_i^1(K) = (x_{i,m+1}^1, x_{i,m+2}^1, \dots, x_{i,m+n}^1)$.

Отметим, что если K одноэлементное множество, то (4), (5) совпадают с формулами преобразования симплекс-метода.

В силу особого правила выбора направляющего вектора x_i^1 можно утверждать (см. теорему 1), что а) $x_{i0}^1 \geq 0^*$, $i = 1, 2, \dots, m$;

б) вектор $x_i^1 \cdot x_{i0}^1 = (x_{i,m+1}^1, x_{i,m+2}^1, \dots, x_{i,m+n}^1)^T$ неотрицательный;

в) для плана $\mu_0 = (x_{10}^1, x_{20}^1, \dots, x_{m0}^1)^T$ значение линейной формы (1) равно $x_{m+10}^1 > x_{m+10}^0 = 0$.

1.3. Не меняя общности рассуждений, допустим, что на r -ом ($r \geq 2$) шаге

$$\theta_r = \frac{x_{r0}^{r-1}}{\|x_r^{r-1}\|} = \min_{\substack{i \geq r \\ i \neq m+1}} \frac{x_{i0}^{r-1}}{\|x_i^{r-1}\|},$$

для тех x_i^{r-1} , у которых по крайней мере одна компонента больше нуля (или $\|x_i^{r-1}\| \neq 0$), где $x_i^{r-1} = (x_{i,m+1}^{r-1}, x_{i,m+2}^{r-1}, \dots, x_{i,m+n}^{r-1})$, $i = r, r+1, \dots, m+1$.

1.4. Полагаем

$$\begin{cases} x_{ij}^r = x_{ij}^{r-1}, & i < r, j = 0, 1, \dots, n, \\ x_{ij}^r = \frac{x_{ij}^{r-1}}{\|x_r^{r-1}\|}, & j = 0, 1, \dots, n, \\ x_{ij}^r = x_{ij}^{r-1} + \alpha_i x_{ij}^{r-1}, & i > r, j = 0, 1, \dots, n, \end{cases}$$

где

$\alpha_i = -(x_i^{r-1}, x_r^r)$, $i = r+1, r+2, \dots, m+1$; $x_r^r = (x_{r,m+1}^r, x_{r,m+2}^r, \dots, x_{r,m+n}^r)$.

При $i < r$ элементы x_{ij}^{r-1} не преобразуются, так как

$$(x_i^{r-1}, x_r^r) = 0.$$

1.5. Пусть $x_{m+10}^r \geq x_{m+10}^{r-1}$ и вектор $\sum_{i=1}^r x_i^r x_{i0}^r$ неотрицателен¹. Да-

¹ Неотрицательность x_{i0}^r легко получить, используя (4) и неравенство Бесселя.

² Если на r -ом ($r \geq 2$) шаге эти условия не выполняются, то все дальнейшие рассуждения проводим для $r = r-1$.

лее допустим, что мы решили прервать этот процесс на r -ом шаге, где $r = 1, 2, \dots, r$. Это означает, что из базиса $A_1, A_2, \dots, A_m$ исключаем векторы $A_1, \dots, A_r$ и включаем $A_{m+1}, \dots, A_{m+k}$, где $A_i (i = 0, 1, \dots, n)$ j -ый вектор-столбец расширенной матрицы системы (2). Переходим к следующей процедуре.

2. Процедура определения коэффициентов разложения векторов A_j относительно "базиса" $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{m+k}$. Пусть

$$V_j = \begin{bmatrix} u_{r+1j} \\ u_{r+2j} \\ \vdots \\ u_{m+kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1m+1}^r, x_{1m+2}^r, \dots, x_{1m+k}^r \\ x_{2m+1}^r, x_{2m+2}^r, \dots, x_{2m+k}^r \\ \vdots \\ x_{rm+1}^r, x_{rm+2}^r, \dots, x_{rm+k}^r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{1j}^r \\ x_{2j}^r \\ \vdots \\ x_{rj}^r \end{bmatrix},$$

$$u_{ij} = x_{ij}^r, \quad i = r+1, r+2, \dots, m,$$

$$u_{m+h+1j} = x_{m+1j}^r, \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Теорема 1. Обозначим $K_r = \{r+1, r+2, \dots, m+k\}$. Тогда
а) вектор-столбец $u_j = (u_{r+1j}, u_{r+2j}, \dots, u_{m+kj})^T$ ($j = 0, 1, \dots, n$) является правым собственным вектором идемпотентной матрицы

$$U = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{m-r} & 0 & u_{r+1m+1} & \dots & u_{r+1m+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & u_{mm+1} & \dots & u_{mm+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{m+km+1} & \dots & u_{m+km+k} \end{bmatrix}$$

с собственным значением $\lambda = 1$;

б) компоненты вектора u_j являются коэффициентами разложения вектора A_j относительно "базиса" $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{m+k}$, т. е.

$$A_j = \sum_{i \in K_r} A_i u_{ij}; \quad (6)$$

в) оценки векторов условий A_j относительно $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{m+k}$, т. е.

$$u_{m+h+1j} = z_j - c_j, \quad \text{где } z_j = - \sum_{i \in K_r} x_{m+1i}^0 u_{ij}, \quad c_j = -x_{m+1j}^0;$$

г) матрица $V = (V_{m+1}, V_{m+2}, \dots, V_{m+k})$ идемпотентная, симметричная и ранг ее равен r (2.3).

Доказательство теоремы основывается на (4.3) и соображениях, приведенных в процедуре 1.

Замечание. Если при $i_0 \in K$, $u_{i_0 0} = 0$, то вектор A_0 в разло-

жении (6) не участвует, так как $u_{i0} = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, и $u_{m+k} = 0$, $i = m+1, m+2, \dots, m+k$ (3.3).

3. Процедура построения планов. Пусть $u_{ij} > 0$, $i \in K$.

3.1. Если $u_{m+k+1,j} > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то u_0 оптимальный план. Этот признак оптимальности следует из (6).

3.2. Если по крайней мере для одного j , $u_{m+k+1,j} < 0$ и $u_{ij} \leq 0$, $i \in K_r$, то линейная форма (1) неограничена на множестве планов задачи.

3.3. Если u_0 опорный план ($k = r$), то переходим к процедуре 1.

3.4. Если u_0 содержит нулевые компоненты, то переходим к п. 3.8 для их исключения.

3.5. Пусть вектор u_0 положительный. Если $u_{m+k+1,j} = 0$, $j \in K_r$, то переходим к процедуре 1.

3.6. Определяем $K_1 \subset K$ такое, что $u_{m+k+1,j} < 0$, $j \in K_1$.

3.7. Пусть $K_1 = \{m+1, m+2, \dots, m+k_1\}$ ($k_1 \leq k$). Обозначим

$$u_{ij}^0 = u_{ij}, \quad u_i^0 = u_i^0(K_1) = (u_{im+1}^0, u_{im+2}^0, \dots, u_{im+k_1}^0)$$

для всех i, j и допустим, что ранг $\{u_{ij}^0\}_{i=1}^{m+k_1}$ равен r_1 .

Согласно процедуре 1 делаем s шагов, где $s = 1, 2, \dots, s: s \leq r_1 \leq k_1$. Пусть u_{ij}^s элементы, полученные после s -го шага, где в качестве направляющих последовательно выбирались первые d и последние $(k-\tau)$ векторы, более точно:

$$u_{r+1}^s, \dots, u_{r+d}^s, u_{m+\tau+1}^s, \dots, u_{m+k}^s. \text{ Здесь}$$

$$u_i^s = (u_{im+1}^s, u_{im+2}^s, \dots, u_{im+k_1}^s), \quad i = r+1, \dots, r+d, \quad m+\tau+1, \dots, m+k_1.$$

Это означает, что от „базиса“ $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{m+k}$ переходим к „базису“ $A_{r+d+1}, A_{r+d+2}, \dots, A_{m+1}$, где $l = k_1$, если $k_1 \geq \tau$ и $l = \tau$, если $k_1 < \tau$.

Пусть

$$\begin{bmatrix} v_{m+1}^j \\ v_{m+2}^j \\ \vdots \\ v_{m+\tau+1}^j \\ \vdots \\ v_{m+k_1}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r+1m+1}^s & u_{r+1m+2}^s & \dots & u_{r+1m+k_1}^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{r+dm+1}^s & u_{r+dm+2}^s & \dots & u_{r+dm+k_1}^s \\ u_{m+\tau+1m+1}^s & u_{m+\tau+1m+2}^s & \dots & u_{m+\tau+1m+k_1}^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m+k_1m+1}^s & u_{m+k_1m+2}^s & \dots & u_{m+k_1m+k_1}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r+1}^s \\ \vdots \\ u_{r+d}^s \\ u_{m+\tau+1}^s \\ \vdots \\ u_{m+k}^s \end{bmatrix} \quad j=0,1,\dots,n$$

Обозначив $u_{m+l+1}^1 = u_{m+k_1+1}^s$ ($j=0, 1, \dots, n$) согласно теореме 2 (см. далее), окончательно для $j=0, 1, \dots, n$ получаем:

$$u_{ij}^1 = \begin{cases} u_{ij}^s, & i = r+d+1, \dots, m; \\ u_{ij}^s + v_{ij}^j, & i = m+1, \dots, m+l'; \\ v_{ij}^j, & i = m+l'+1, \dots, m+l; \end{cases} \quad (7)$$

где $l' = \tau$, $l = k_1$ при $k_1 \geq \tau$; $l' = k_1$, $l = \tau$ при $k_1 < \tau$.

Значение линейной формы (1) для плана $u_0 = (u'_{r+d+1}, \dots, u'_{m+l})^T$ равно $u'_{m+l+10} \geq u'_{m+l-10}$. Переходим к п. 3.1, где вместо K_r и K рассматриваем соответственно множества

$$K_1 = \{r+d+1, r+d+2, \dots, m+l\} \text{ и } K' = \{m+1, m+2, \dots, m+l\}.$$

3.8. Исключение нулевых компонент. Пусть

$$u_{i0} = 0, i = r+1, \dots, r+d, m+l+1, \dots, m+k \quad (8)$$

некоторые или все нулевые компоненты плана u_0 . Определяем множество $K_1 \subset K$ и переходим к п. 3.7, где на основании (8), т. е. соответственно номерам нулевых компонент плана u_0 , в качестве направляющих последовательно выбираем векторы $u'_{r+1}, \dots, u'_{r+d}, u'_{m+l+1}, \dots, u'_{m+k}$. В результате, исключив $(d+k-l)$ нулевых компонент, получим план u_0 со значением линейной формы, равным $u'_{m+l+10} = u'_{m+k+10}$.

Теорема 2. Обозначим вектор-столбец $u_j = (u'_{r+d+1}, \dots, u'_{m+l})^T$ ($j=0, 1, \dots, n$), элементы которого определены согласно (7). Тогда u_j является правым собственным вектором идемпотентной матрицы

$$U' = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{m-r-d} & u'_{r+d+1m+1} & \dots & u'_{r+d+1m+l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & u'_{mm+1} & \dots & u'_{mm+l} \\ 0 & \dots & 0 & u'_{m+1m+1} & \dots & u'_{m+1m+l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u'_{m+lm+1} & \dots & u'_{m+lm+l} \end{pmatrix}$$

с собственным значением $\lambda = 1$, кроме того

$$A_j = \sum_{i=r+d+1}^{m+l} A_i u'_{ij}.$$

Подобное разложение в рассматриваемом смысле является единственным.

З а м е ч а н и е. В процессе построения планов не исключена возможность перехода к тому же «базису». В этом случае для ускорения процесса необходимо на следующей итерации соответствующее множество K_1 выбрать одноэлементным.

Теорема 3. Если в процессе построения планов из «базиса» $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{m+k}$ исключается по крайней мере один вектор, то максимум через d итераций получим опорный план, где $d = \max(r, k-r)$.

Отметим, что в процедуре 3 K_1 можно выбирать также из условия $K_1 \subset N$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Из приведенных рассуждений следует, что а) в процессе построения планов случай вырожденности не требует усложнения метода, б) процесс решения задачи может быть построен в виде план-план; в) в зависимости от изменения целевой функции можно регулировать процессом решения задачи.

Наконец отметим, что предлагаемый метод может лечь в основу для пересмотра других конечных методов линейного программирования (7-10), основанных на идее особого правила выбора направляющего элемента.

Научно-производственное объединение
ММП Армянской ССР

ԱՊՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Սխմայլե.Դս մեթոդի ընդհանրացում

Աշխատանքում դիտարկվում է դժարին ծրագրավորման խնդիրների լուծման մի մեթոդ, որը հիմնված է ոչ թե մեկ ուղղորդիչ էլեմենտի ընտրության վրա, ինչպես այդ տրվում է սխմայլե.Դս մեթոդում, այլ միաժամանակ մի քանի ուղղորդիչ էլեմենտների՝ ուղղորդիչ վեկտորի ընտրության կանոնի վրա:

Մեթոդի հիմք է հանդիսանում ժողովրդական բացառումների ընդհանրացումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ G. B. Dantzig, *Econometrica*, 17 (1949). ² Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1963. ³ Р. Беллман, Введение в теорию матриц, Наука, М., 1976. ⁴ А. Д. Тумиев, В сб.: Автоматизированные системы планирования и управления, изд-во Айастан, Ереван, 1978. ⁵ А. Д. Тумиев, Труды международного симпозиума. Моделирование экономических процессов, ВЦ АН СССР, М., 1975. ⁶ Л. В. Кантарович, Математические методы в организации и планировании производства, ЛГУ, 1939. ⁷ Гасс, Линейное программирование (методы и приложения), Физматгиз, М., 1961. ⁸ Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, Линейное программирование, Физматгиз, М., 1963. ⁹ И. В. Романовский, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977. ¹⁰ В. Г. Карманов, Математическое программирование, Наука, М., 1975. ¹¹ В. А. Булавский, Р. А. Звягина, М. А. Яковлева, Численные методы линейного программирования, Наука, М., 1977.