ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 4

УДК 519.4.

МАТЕМАТИКА

В. Л. Ширванян

Проблема равенства слов для групп с рекурсивным множеством определяющих соотношений вида $A^n=1$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 9/IV 1980)

В совместной работе П. С. Новикова и С. И. Адяна [1] была доказана разрешимость проблемы равенства слов для свободных периодических групп $B(m, n)$ при достаточно большом нечетном показателе периодичности n. Доказательство этого результата для нечетных $n\geqslant 665$ содержится в монографии [2]. Оно основано на классификации по рангам периодических слов вида A^n и преобразований таких слов. Мы предполагаем, что читатель знаком с изложенной в [2] теорией преобразований слов.

В [2] доказано, что при нечетных $n\geqslant 665$ группа $B(m, n)$ может быть задана образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_m^{-1} \tag{1}$$

и всеми определяющими соотношениями

$$A^n=1, \tag{2}$$

где A—произвольный элементарный период ранга $\alpha\geqslant 1$. В настоящей статье мы докажем разрешимость проблемы равенства слов для групп, задаваемых рекурсивным множеством определяющих соотношений вида (2) с элементарными периодами A при фиксированном нечетном $n\geqslant 665$. Кроме того, мы докажем критерий разрешимости проблемы равенства слов для группы, все определяющие соотношения которой образуют подмножество одной системы соотношений группы $B(m, n)$, рассмотренной в работе [3].

Мы будем использовать обозначения и результаты из [2]. Пусть фиксированы некоторое нечетное число $n\geqslant 665$ и алфавит (1). Согласно изложенной в [2] теории для любого ранга $\alpha\geqslant 1$ мы имеем понятие элементарного периода ранга α. Пусть для каждого $\alpha\geqslant 1$ $\mathfrak{M}_\alpha$ есть множество всех элементарных периодов A ранга α таких, что A^n входит в некоторое слово $Z\in\overline{M}_{\alpha-1}$. Пусть

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathfrak{M}_\alpha$$

Теорема 1. *Для любого рекурсивного подмножества* $\mathfrak{M}'$ *множества* $\mathfrak{M}$ *группа* G, *заданная образующими* (1) *и системой определяющих соотношений*

$$A^n = 1 \quad (A \in \mathfrak{M}'), \tag{3}$$

имеет разрешимую проблему равенства слов.

Доказательство. Пусть множество $\mathfrak{M}'$ и группа G такие, как указано в условии теоремы 1. Очевидно, мы можем считать, что множество $\mathfrak{M}'$ вместе с каждым периодом A содержит все его циклические сдвиги и обратный период A^{-1} (см. II, 3. 5). Для каждого $\alpha \geqslant 1$ через $\mathfrak{M}'_\alpha$ обозначим множество всех элементарных периодов ранга α, содержащихся в $\mathfrak{M}'$. Из рекурсивности множества $\mathfrak{M}'$ и принципа эффективности (см. I, 5. 4) следует, что при любом $\alpha \geqslant 1$ множество $\mathfrak{M}'_\alpha$ рекурсивно. Заметим, что $\mathfrak{M}'_\alpha$ при некоторых α может оказаться пустым. Имеем

$$\mathfrak{M}' = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathfrak{M}'_\alpha. \tag{4}$$

Для каждого $\alpha \geqslant 1$ через G_α мы обозначим группу, заданную образующими (1) и всеми определяющими соотношениями

$$A^n = 1 \quad \left(A \in \bigcup_{i=1}^{\alpha} \mathfrak{M}'_i \right).$$

Сначала мы докажем разрешимость проблемы равенства слов для групп G_α. Для этого рассмотрим такой вариант изложенной в ([2]) теории преобразований слов, который существенно зависит от выбора множеств G_α. А именно, мы видоизменим эту теорию следующим образом.

В определении простых поворотов ранга α (см. I, 4. 16) вместо условия $Z \in \overline{\mathrm{M}}_{\alpha-1}$ мы потребуем, чтобы соответствующий период A принадлежал множеству $\mathfrak{M}'_\alpha$.

В результате этого изменения у нас будут возможны только такие реальные повороты ранга α, которые связаны с простыми поворотами периодических слов $A^t A_1$ с периодами $A \in \mathfrak{M}'_\alpha$. Активными будут только те ядра, основы которых родственны некоторому слову A^n, где $A \in \mathfrak{M}'_\alpha$. Соответственно, мы не будем ограничивать сверху число участков вхождения $V \in$ Норм (α, X, r) и $W \in Я(\alpha, X)$ в словах $X \in P_\alpha$, $X \in R_\alpha$, $X \in K_\alpha$, $X \in L_\alpha$ и $X \in M_\alpha$, если основы этих вхождений не родственны никакому слову A^n, где $A \in \mathfrak{M}'_\alpha$ (см. I, 4.26). Иначе говоря, в определениях I, 4.26 мы будем считать, что ограничения на число участков вхождений $V \in$ Норм $(\alpha, X, n-88)$ и $W \in Я(\alpha, X)$ относятся только к таким вхождениям, основы которых родственны некоторому слову A^α, где $A\in\mathfrak{M}'_\alpha$. Все остальные определения из § 4 главы I мы оставим без изменения. В результате у нас получится новая система понятий, за которыми мы сохраним все старые названия и обозначения. Легко убедиться, что для новых понятий будут верны аналоги всех свойств, которые были рассмотрены в [2].

Так как из рекурсивности множества $\mathfrak{M}'$ следует, что все множества $\mathfrak{M}_\alpha$ также рекурсивны, то в новой теории будет также выполнен принцип эффективности (см. I, 5.4), т. е. все рассматриваемые множества, функции и отношения между словами и вхождениями будут алгоритмически эффективны. Кроме того, для каждого доказанного в [2] утверждения о существовании того или иного объекта имеется алгоритм, выдающий искомый объект по данным значениям параметров, от которых он зависит.

На базе новой теории мы можем исследовать группы G_α, аналогично тому, как в [2] это сделано для групп $B(m, n, \alpha)$. Точно так же, как в [2] доказывались леммы VI. 2.3 и VI. 2.8, мы можем доказать, что у нас для любых слов $X, Y\in R_\alpha$ выполнено соотношение

$$X = Y \text{ в } G_\alpha \leftrightarrow X \overset{\alpha}{\sim} Y. \tag{5}$$

Кроме того, аналогично VI. 2.4 можно доказать, что для любого $\alpha>0$ и любого слова X в алфавите (1) найдется такое слово $Y\in K_\alpha$, что $X=Y$ в G_α. Причем, если $\alpha > \partial(X)$, то такое Y можно указать в $A_{\alpha+1}$ (см. определения I, 4.34).

В силу принципа эффективности имеется алгоритм, который по слову X выдает некоторое слово Y с указанными свойствами. Пусть дано некоторое слово X в алфавите (1). Тогда мы сначала найдем соответствующее слово $Y\in K_\alpha$, такое, что $X=Y$ в G_α. Так как $1, Y\in R_\alpha$, то из соотношения (5) получим

$$X = 1 \text{ в } G_\alpha \leftrightarrow Y \overset{\alpha}{\sim} 1$$

Так как пустое слово 1 не содержит активных ядер в любом ранге, то на основе леммы IV. 2.5 для нашего случая из $Y\overset{\alpha}{\sim}1$ следует $Y\overset{\alpha-1}{\sim}1$ при любом α. Следовательно, мы имеем

$$Y\overset{\alpha}{\sim}1 \leftrightarrow Y\overset{0}{\sim}1 \leftrightarrow Y \overset{\circ}{=} 1$$

т. е. X равно 1 в G_α в том и только том случае, когда соответствующее слово Y пусто.

Теперь мы можем доказать разрешимость проблемы равенства слов в группе G. Пусть X произвольное слово в алфавите (1). Нам достаточно доказать следующую эквивалентность

$$X = 1 \text{ в } G \leftrightarrow X = 1 \text{ в } G_\beta, \text{ где } \beta = \partial(X) \tag{6}$$

Импликация справа налево очевидна.

Пусть $X=1$ в G. Так как в выводе равенства $X=1$ в G участвует только конечное число определяющих соотношений группы G, то тогда $X=1$ в некоторой группе G_γ. Если $\gamma \leq \beta$, то имеем $X=1$ в G_β. Пусть $\gamma > \beta$. В силу аналога леммы VI. 2.4 по слову X можно указать такое слово $Y \in K_\beta \cap A_{\beta+1}$, что $X = Y$ в G_β, где $\beta = \partial(X)$. Тогда $X = Y$ в G_γ и, следовательно, $Y=1$ в G_γ. Так как из $Y \in A_{\beta+1}$ следует, что $Y \in R_\gamma$ (см. VI. 1.1), то в силу соотношения (5) при $\alpha = \gamma$ из $Y = 1$ в G_γ следует $Y \overset{\gamma}{\sim} 1$, откуда в силу IV. 2.15 получаем $Y \overset{\beta}{\sim} 1$. А это в силу соотношения (5) означает, что $Y=1$ в G_β. Тогда $X=1$ в G_β.

Мы доказали соотношение (6). Этим завершается доказательство теоремы 1.

В пункте VI. 2.9 монографии (2) было доказано, что свободная периодическая группа $B(m, n)$, при нечетных $n \geq 665$ может быть задана образующим (1) и определяющими соотношениями

$$A^n = 1 \quad (A_n \in E), \tag{7}$$

где E класс элементарных слов, который был определен в пункте VI. 2.1 работы (²). Именно

$$E = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} E_\alpha$$

где E_α есть множество периодических слов вида A^n с элементарным периодом A ранга α, удовлетворяющее двум условиям:

а) Для всякого элементарного слова E ранга α имеется одно и только одно слово A^n, такое, что

$$A^n \in E_\alpha \& ((\text{Род}(E, A_n)) \vee \text{Род}(E, A^{-n}))$$

б) Если $A^n \in E_\alpha$, то при некоторых P и Q имеем $PA^nQ \in \overline{M}_{\alpha-1}$.

Заметим, что в силу принципа эффективности все понятия, встречающиеся в определении множеств E_α, эффективны, т. е. для них существует алгоритм, проверяющий их истинность. Поэтому множества E_α и E можно выбрать рекурсивными. Другими словами, мы можем считать, что имеется алгоритм, проверяющий по данному слову X, принадлежит оно множеству E или нет. Для этого достаточно, например, сначала упорядочить все слова в алфавите (1) по длине, а слова одинаковой длины между собой — лексикографически на базе упорядочения (1) для образующих. Тогда для всякого элементарного слова E ранга α из всех слов A^n, удовлетворяющих условиям а) и б), мы можем включить в E_α то слово A^n, которое имеет наименьший номер в этом упорядочении.

Пусть выбрано произвольное рекурсивное множество определяющих соотношений (7) для группы $B(m, n)$. Для любого такого множества E верна следующая теорема

Теорема 2. *Пусть G—группа, заданная образующими* (1) *и системой определяющих соотношений*

$$A^n = 1 \quad (A^n \in M) \tag{8}$$

где M — произвольное подмножество множества E. Для того, чтобы группа G имела разрешимую проблему равенства слов, необходимо и достаточно, чтобы множество M было рекурсивно.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Пусть G имет разрешимую проблему равенства слов. Алгоритм, проверяющий равенство любого данного слова X единице в группе G, позволяет нам проверить для любого слова $A^n \in E$, выполнено равенство $A^n = 1$ в G или нет. Но в (3) было доказано, что для любого такого множества E системы определяющих соотношений (7) является независимой, т. е. для любого слова A^n из E мы имеем:

$$A^n = 1 \text{ в } G \Leftrightarrow A^n \in M$$

Следовательно, множество M рекурсивно.

Приношу благодарность С. И. Adяну за внимание к работе.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Վ. Լ. ՇԻՐՎԱՆՅԱՆ

Բառերի հավասարության պրոբլեմը ռեկուրսիվ բազմությամբ $A^n = 1$ տեսքի առնչություններով տրվող խմբերում

Պ. Ս. Նովիկովի և Ս. Ի. Ադյանի կողմից ցույց է տրվել, որ $m > 1$ թվով ծնորդներով և $X^n = 1$ նույնությամբ տրվող խմբերում՝ $B(m, n)$, որտեղ $n \geq 665$ կենտ թիվ է, բառերի հավասարության պրոբլեմը լուծելի է։ Ապացույցը հիմնված է $A^t A_1$ տեսքի պարբերական բառերի ձևափոխությունների, նրանց ըստ $\alpha \geq 1$ ռանգի դասակարգման տեսության վրա, որը դիտարկված է Ս. Ի. Ադյանի գրքում։

Միաժամանակ ցույց է տրվում, որ տրված n-ի դեպքում $B(m, n)$ խումբը կարելի է որոշել բոլոր $A^n = 1$ տեսքի առնչություններով, որտեղ A-երը 3 ռանգի էլեմենտար պարբերություններ են։

Մտցնելով որոշ փոփոխություններ նշված տեսության մեջ, հոդվածում ապացուցվում է, որ $A^n = 1$ տեսքի առնչություններով տրվող խմբերում, որտեղ $n \geq 665$ կենտ թիվ է, իսկ A-երը 3 ռանգի էլեմենտար պարբերություններ են, բառերի հավասարության պրոբլեմը լուծելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ խումբը որոշող առնչությունների բազմությունը ռեկուրսիվ է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. С. Новиков, С. И. Адян*, Изв. АН СССР, сер. матем., 32 (1968). [2] *С. И. Адян*, Проблема Бернсайда и тождества в группах, «Наука», М., 1975. [3] *В. Л. Ширванян*, Матем. сб., 100, № 1 (1976).