

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задовн, Ф. М. Поладян

Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Х. Арутюняном 2/IV 1980)

В настоящей работе рассматривается задача о кручении стержня с круговой осью и постоянным поперечным сечением, материал которого обладает свойством нелинейной ползучести (1).

Пусть стержень находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (рис. 1).

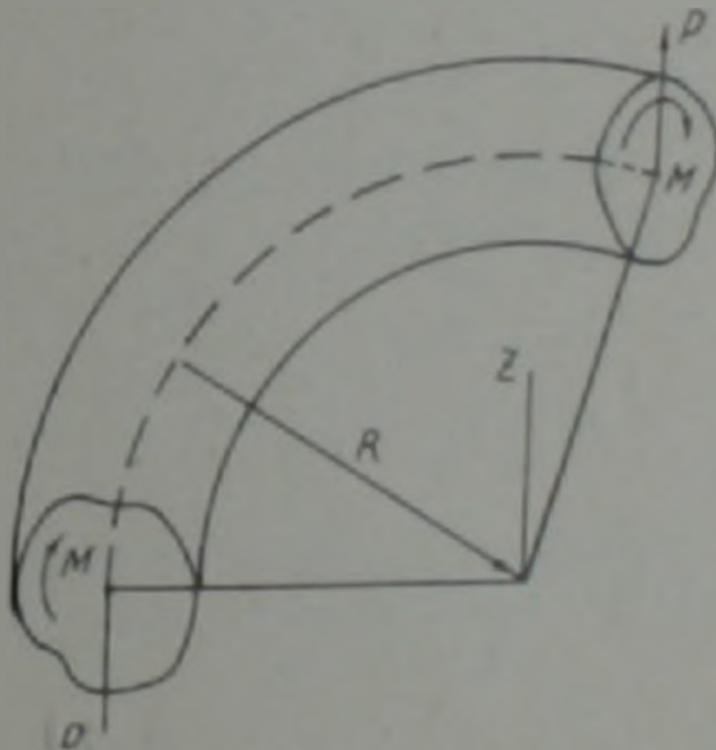


Рис. 1. Стержень с круговой осью и постоянным поперечным сечением, находящийся под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов $M=PR$, приложенных на торцевых сечениях

Впервые такая задача в постановке теории упругости рассматривалась в работе (2), а затем — в (3-5). Аналогичная задача за пределом упругости для неупрочняющегося материала исследована в (1-10). Для упрочняющегося материала эта задача исследована в работах (11-13).

1. В случае пространственного напряженного состояния связь

между компонентами деформации ползучести и напряжения при нелинейной теории наследственности с учетом старения материала, согласно Н. Х. Арутюняну ⁽¹⁾, имеет вид

$$2G\varepsilon_{ij} = S_{ij} - \int_{\tau_1}^t S_{ij} f(\sigma_0) K(t, \tau) d\tau, \quad (1.1)$$

где $G = E/3$, а E принимается постоянным, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$, δ_{ij} — символ Кронекера, σ — среднее давление, $f(\sigma_0)$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, σ_0 — интенсивность касательных напряжений, $K(t, \tau) = 3G \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Воспользуемся тороидальными координатами α, β, γ : $x = \rho \cos \gamma$, $y = \rho \sin \gamma$, $z = H \sin \beta$, где $\rho = a \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, $H = a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$, здесь $0 \leq \alpha \leq \infty$, $-\pi \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ (рис. 2).

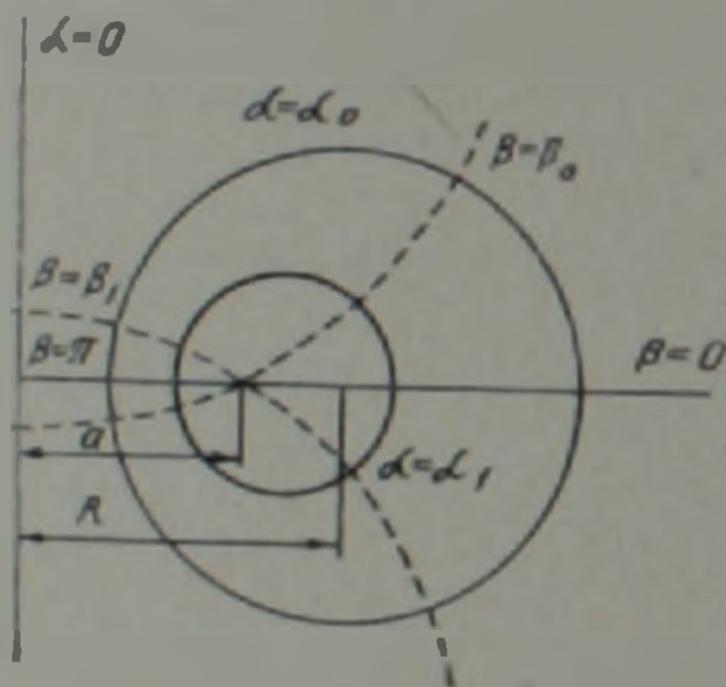


Рис. 2. Семейство окружностей с полюсом и семейство дуг окружностей, ортогональных к ним

Для компонентов деформации будем иметь ⁽¹⁴⁾

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{H} \right); \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \beta} u_\beta \right) \Big|_{\alpha, \beta}; \quad (1.2)$$

$$2\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\alpha}{H} \right) + \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\gamma}{\rho} \right) \Big|_{\alpha, \beta}; \quad \varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} (u_\gamma) + \frac{1}{H\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right).$$

Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{\alpha\gamma}$ и $\sigma_{\gamma\gamma}$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия остается ⁽¹⁴⁾

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(H\rho^2 \sigma_{\alpha\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(H\rho^2 \sigma_{\gamma\gamma} \right) = 0, \quad (1.3)$$

а из остальных следует, что напряженное состояние стержня не зависит от γ , следовательно, тензор деформации также не зависит от γ . Из (1.2) перемещения представим в виде

$$u_\alpha = u_{\alpha 0} + \int_{\alpha, \beta} F_\alpha d\gamma; \quad F_\alpha = 2\rho \varepsilon_{\alpha 1} - \frac{\rho^2}{H} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\gamma}{\rho} \right) \Big|_{\alpha, \beta}; \quad (1.4)$$

$$u_\gamma = u_{\gamma 0} + \int \left(\rho \varepsilon_{\gamma 1} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial z} u_\alpha - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta \right) d\gamma,$$

где $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, $u_{\gamma 0}$ — произвольные функции α , β и γ .

Подставляя (1.4) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, будем иметь

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial z} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\beta 0} \Big|_{\alpha, \beta}; \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_{\alpha\beta}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_{\alpha 0}}{H} \right), \quad (1.5)$$

а относительно F_α , F_β приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решение которой будет

$$F_\alpha = \left(D_0 + D_1 z \right) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \left(D - D_1 \rho \right) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha, \beta}, \quad (1.6)$$

где D_0 , D_1 , D — произвольные функции от l .

Исключая из (1.4) u_γ и используя (1.6), получаем уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta 1} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha 1} \right) = D \frac{H^2}{\rho^2}. \quad (1.7)$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, кроме $\varepsilon_{\alpha 1}$ и $\varepsilon_{\beta 1}$, получаем систему относительно $u_{\alpha 0}$, $u_{\beta 0}$, решение которой будет

$$u_{\alpha 0} = - \frac{N_1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{N_2}{H} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha, \beta}, \quad (1.8)$$

$$\text{где } N_1 = \frac{A}{4} (\rho^2 - z^2) + \frac{B}{2} \rho z + \frac{C}{2} \rho - E_1 z;$$

$$N_2 = \frac{A}{2} \rho z - \frac{B}{4} (\rho^2 - z^2) + \frac{C}{2} z + E_1 \rho,$$

A , B , C , E_1 — произвольные функции от l .

После подстановки (1.6), (1.8) в (1.4) получим выражения для перемещения u_α , u_β , u_γ .

Вводя функцию напряжений

$$\sigma_{z\tau} = -\frac{1}{H\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}; \quad \sigma_{\beta\tau} = \frac{1}{H\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1.9)$$

от (1.1) и (1.7) приходим к основному уравнению задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - \int_{\tau_1}^t \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(\sigma_0)}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{f(\sigma_0)}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right] \right\} K(t, \tau) d\tau = \frac{DGH^2}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$z_0 = \frac{1}{H\rho^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right)^2}. \quad (1.11)$$

Таким образом, задача о кручении стержня с круговой осью в условиях нелинейной ползучести приводится к определению Φ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничном условии

$$\Phi(z, \beta, t) = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \int_{\Omega} \int \left[(\rho - R) \sigma_{z\tau} - z \sigma_{\beta\tau} \right] d\Omega, \quad (1.12)$$

где $d\Omega = H^2 dz d\beta = d\rho dz$.

Переходя от $\sigma_{\beta\tau}$, $\sigma_{z\tau}$ к $\sigma_{z\tau}$, $\sigma_{\beta\tau}$ и подставляя в (1.12) после применения формулы Грина—Остроградского, получаем

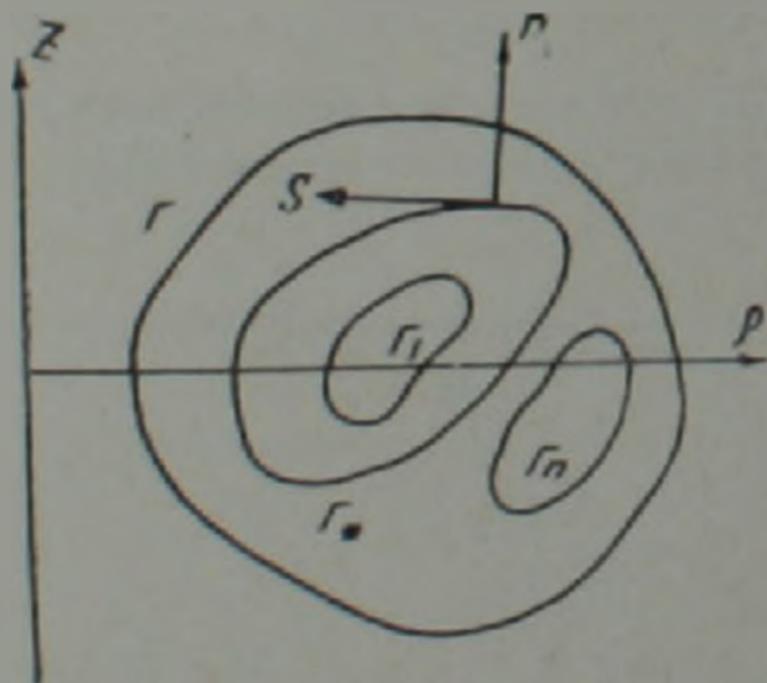


Рис. 3. Поперечное сечение скручиваемого стержня Γ_0 — замкнутая кривая, целиком лежащая в этом сечении; n — направление внешней нормали к контуру Γ_0 , а s — дуга этого контура

$$M = - \int_{\Gamma} \Phi d \left(\frac{z}{\rho} \right) + R \int_{\Gamma} \frac{\Phi}{\rho^2} dz + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^2} d\Omega.$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешнем контуре, для многосвязной области получим

$$M = - \sum_{k=1}^n R \Phi_k \int_{\Gamma_k} \frac{dz}{\rho^2} + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{\rho^2} d\Omega,$$

где $\Phi_k(t)$ значение Φ на контуре Γ_k .

2. Пусть Γ_0 — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого стержня. Область, ограниченную этим контуром, обозначим Ω_0 (рис. 3). Интегрируя обе части уравнения (1.10) в области Ω_0 и переходя к контурному интегралу, получаем

$$\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \int_{\Gamma_0} f(z_0) \frac{\partial \Phi}{\partial n} K(t, z) dz \right) ds = - \frac{DG}{2} \int_{\Gamma_0} \frac{dz}{\rho^2}, \quad (2.1)$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_0 , а s — дуга этого контура. Формула (2.1), которая используется при рассмотрении стержней с многосвязным поперечным сечением, представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции касательных напряжений при кручении стержня с круговой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

3. Пусть поперечное сечение ограничено окружностью $\alpha = \alpha_0$. Тогда Φ удовлетворяет условию $\Phi(\alpha_0, \beta, t) = 0$. Положим, что

$$f(\alpha_0) = 1 + \lambda \alpha_0^2,$$

где λ — физический параметр, характеризующий нелинейный закон ползучести. Решение уравнения (1.10) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Phi_k(\alpha, \beta, t), \quad (3.2)$$

где Φ_0 соответствует случаю идеально упругого материала. Подставляя (3.2) в (1.10) и (1.11), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \beta} = H^2 \varphi_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Здесь

$$\varphi_0(t) = GD(t) + G \int_{\Gamma_0} D(z) R(t, z) dz, \quad (3.4)$$

а $\varphi_n(\alpha, \beta, t)$ при $n \geq 1$ определяются соотношениями

$$\varphi_n(\alpha, \beta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Gamma_0} N(t, z) (\omega_k \varphi_{n-1-k} + \text{grad } \Phi_k \cdot \text{grad } \omega_{n-1-k}) dz, \quad (3.5)$$

где

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^t R(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi; \quad (3.6)$$

$$\varphi_n = \rho^{-4} \sum_{k=1}^n \operatorname{grad} \Phi_k \operatorname{grad} \Phi_{n-k}, \quad (3.7)$$

а $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. Если

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\mu(t-\tau)}],$$

то

$$R(t, \tau) = \gamma - \gamma' \tau + \left[\gamma''(\tau) + \gamma'^2(\tau) - \gamma \gamma'(\tau) \right] e^{\mu \tau} \int_0^t e^{-\mu x} dx,$$

где

$$\gamma(t) = \gamma \int_{-1}^1 \left| 1 + 3C\varphi(\tau) \right| d\tau,$$

причем, согласно (1), $\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}$, где C_0 , A_1 и γ_0 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию ψ_n при помощи подстановки $\Phi_n(\alpha, \beta, t) = \operatorname{sh}^2 \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-3/2} \psi_n(\alpha, \beta, t)$, из (3.3) получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial \psi_n}{\partial \alpha} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right) \psi_n = \\ = \frac{H^2 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \varphi_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

при граничных условиях $\psi_n(\alpha_0, \beta, t) = 0$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Введем функцию

$$Z_n^m(\alpha, \beta) = P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) Q_n^m(\operatorname{ch} \beta) - P_n^m(\operatorname{ch} \beta) Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha),$$

где $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода n -го порядка m -го индекса.

Решая уравнение (3.8), удовлетворяющее указанным выше условиям, и переходя к $\Phi_n(\alpha, \beta, t)$, получим

$$\Phi_n = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha}{2\pi (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{3/2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_n(\xi, \tau, t) (\operatorname{ch} \xi - \cos \tau)^{3/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \tau) d\Omega, \quad (3.9)$$

где Γ — функция Грина для данной задачи, причем $\Gamma = B(\alpha, \beta; \xi, \tau)$, при $\xi < \alpha$, где

$$B(\alpha, \beta; \xi, \tau) = \frac{16}{9} Z_{-1/2}^2(\alpha_0, \xi) \frac{Q_{-1/2}^2(\operatorname{ch} \alpha)}{Q_{-1/2}^2(\operatorname{ch} \alpha_0)} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{k-1/2}^2(x_0, \xi)}{(k^2-9/4)(k^2-1/4)} \cdot \frac{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x)}{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x_0)} \cos k(\beta-\eta)$$

и $\Gamma = B(\xi, \eta; \alpha, \beta)$ при $x \leq \xi$.

4. Пользуясь формулами (1.9), (3.2) и (3.9), получим следующие формулы для определения напряжений σ_{η} и τ_{η} в сплошном круге:

$$\sigma_{\eta}(\alpha, \beta, t) = \frac{3(\operatorname{ch} x - \cos \beta)^{3/2} \sin \beta}{4\pi a^3} \int_0^x \int_{\Omega} S(\xi, \eta, t) (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega +$$

$$+ \frac{(\operatorname{ch} x - \cos \beta)^{3/2}}{\pi a^3} \int_0^x \int_{\Omega} S(\xi, \eta, t) (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta)^{3/2} \frac{\partial \Gamma(\alpha, \beta; \xi, \eta)}{\partial \eta} d\Omega;$$

$$\sigma_{\eta}(\alpha, \beta, t) = \frac{(\operatorname{ch} x - \cos \beta)^{1/2} (5\operatorname{ch}^2 x - 8\operatorname{ch} x \cos \beta + 3)}{4\pi x^2 \operatorname{sh}^2 x} \int_0^x \int_{\Omega} S(\xi, \eta, t) (\operatorname{ch} \xi -$$

$$- \cos \eta)^{3/2} \Gamma_1(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega + \frac{(\operatorname{ch} x - \cos \beta)^{3/2}}{2\pi x^2 \operatorname{sh} x} \int_0^x \int_{\Omega} S(\xi, \eta, t) (\operatorname{ch} \xi -$$

$$- \cos \eta)^{3/2} \Gamma_1(\alpha, \beta; \xi, \eta) d\Omega,$$

где

$$\Gamma_1(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{16}{9} Z_{k-1/2}^2(x_0, \xi) \frac{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x)}{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x_0)} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{k-1/2}^2(x_0, \xi)}{(k^2-9/4)(k^2-1/4)} \cdot \frac{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x)}{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x_0)} \cos k(\beta-\eta), \text{ при } \xi \leq x;$$

$$\Gamma_1(\alpha, \beta; \xi, \eta) = \frac{16}{9} Z_{k-1/2}^2(x_0, x) \frac{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} \xi)}{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x_0)} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{k-1/2}^2(x_0, x)}{(k^2-9/4)(k^2-1/4)} \cdot \frac{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} \xi)}{Q_{k-1/2}^2(\operatorname{ch} x_0)} \cos k(\beta-\eta), \text{ при } x \leq \xi;$$

$$S(\alpha, \beta, t) = \tau_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(\alpha, \beta, t);$$

$$Z_{k-1/2}^2(x_0, x) = P_k'(\operatorname{ch} x_0) Q_k'(\operatorname{ch} x) - P_k'(\operatorname{ch} x) Q_k'(\operatorname{ch} x_0).$$

5. Исследуем сходимость ряда (3.2). Для доказательства существования решения надо показать, что степенной ряд (3.2), где коэффициенты Φ_n определяются из рекуррентных формул (3.9), сходится абсолютно и равномерно. Для этой цели необходимо оценить Φ_n , в зависимости от n , равномерно относительно t из некоторого промежутка. Зададимся фиксированным промежутком изменения времени $\tau_1 \leq t \leq T$ и положим

$$\max |K(t, \tau)| = K_T, \max |R(t, \tau)| = R_T, (\tau_1 \leq \tau, t \leq T). \quad (5.1)$$

Тогда из (3.6) и (5.1) очевидно, что

$$|N(t, \tau)| \leq K_T(1 + R_T T) = N_T.$$

Вводя норму

$$\|X\| = \max |X| + \sup \frac{|X(A) - X(B)|}{|AB|},$$

где A, B — произвольные точки внутри поперечного сечения стержня, $0 < \delta < 1$, при помощи априорных оценок Шаудера⁽¹⁵⁾, которые в данном случае пишутся в виде

$$\|D^2 \Phi_n\| \leq c_0 \|\varphi_n\|, \quad (5.2)$$

где c_0 — некоторая постоянная, зависящая от формы области, получим рекуррентную систему неравенств. Из (3.4), (3.5), (3.7) в силу (5.2) получим

$$\|\Phi_n\| \leq \gamma \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| q_{n-k},$$

где

$$\gamma = 2N_T T \mu c_0^2 (1 + 6\mu c_0);$$

$$\mu = \max_{(n, j) \in \mathbb{N}} \left\{ \|H^{-2}\|, \left\| \frac{\partial}{\partial x} (H^{-2} \rho^{-1}) \right\|, \left\| \frac{\partial}{\partial \beta} (H^{-2} \rho^{-1}) \right\|, \|H^{-2} \rho^{-1}\| \right\};$$

$$q_n = \sum_{k=0}^n \|\varphi_k\| \|\varphi_{n-k}\|.$$

Рассмотрим ряд с общим членом $\lambda^n \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_0^{-n}$. Методом индукции можно показать, что $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_0\| n^{-2} \lambda_0^{-n}$. Нетрудно заметить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|\varphi_n\|$, а следовательно и ряд (3.2) сходятся абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = \lambda_0 = (364\gamma \|\varphi_0\|^2)^{-1}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Մ. Ա. ԶԱԳՈՅԱՆ, Ն. Մ. ՓՈՒԱԳՅԱՆ

Կոր ձողի ոչ-գծային սողի խնդիրը ոլորման դեպքում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է շրջանային հատույթ ունեցող կոր ձողի ոչ-գծային սողի խնդիրը ոլորման դեպքում:

Օգտագործելով թորական կոորդինատները, խնդիրը բերվում է ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը գրոյական եզրային պայմանով:

Այդ հավասարման լուծումը որոնվում է փոքր պարամետրի նկատմամբ աստիճանային շարքի տեսքով: Ապացուցվում է այդ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Ստացված են նաև բանաձևեր լարման կոմպոնենտները հաշվելու համար:

- ¹ Н. Х. Арутюнян. Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1952. ² O. Göhner, *Ingr—Arch*, Bd 2 (1931). ³ А. Л. Рабинович, Труды Моск. физ.-техн. ин-та, вып. 1 (1958). ⁴ H. L. Langhaar, *J. Appl. Mech.*, vol. 19, № 1 (1952). ⁵ J. Stein, *Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech.*, vol. 30, № 1 (1963) (Рус. перев. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. E, 1963, т. 30, № 1). ⁶ W. Freiberger, *Austral. J. Sci. Res. Ser. A*, vol. 2, No 3, (1949). ⁷ Д. Д. Ивлиев. Теория идеальной пластичности, Наука, М., 1966. ⁸ W. Freiberger, W. Prager, *J. Appl. Mech.*, vol. 23, No 3 (1956). ⁹ W. Freiberger, *Appl. Math.*, vol. 14, No 3 (1958). ¹⁰ A. J. Wang, W. Prager, *J. Mech. and Phys. Solids*, vol. 3 (1955). ¹¹ И. А. Задоян, Пластическое кручение неполного тора, ДАН СССР, т. 223, № 2 (1975). ¹² М. А. Задоян, «Изв. АН СССР», МТТ, № 1, 1977. ¹³ П. В. Галлчан, М. А. Задоян, «Известия АН АрмССР», Механика, т. 32, № 1 (1979). ¹⁴ В. В. Ноложилов. Теория упругости, Судстройиздат, М.—Л., 1962. ¹⁵ Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1965.