

УДК 620.10:539.374:621.762

МЕХАНИКА

Г. Л. Петросян

Теория пластичности пористого ортотропного материала
 с изотропным упрочнением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 27/V 1980)

Пористые материалы, полученные методами порошковой металлургии, в зависимости от особенностей технологического процесса могут обладать анизотропией механических свойств (1). Так, например, прокатанный листовый материал является ортотропным (2), экструдированный стержень круглого сечения — трансверсально изотропным (3) и т. д. Примерами ортотропных материалов могут служить также композиционные листовые материалы волокнистого строения.

В работах (2,4) приведены варианты теории пластичности ортотропного материала с изотропным упрочнением, однако в них не учтена пористость материала. В работах же (5,6) предложены варианты теории пластичности пористых материалов без учета свойств анизотропии.

Используя результаты, приведенные в (2,6), условие пластичности пористого ортотропного материала представим в виде

$$H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 9A\alpha^m \sigma_0^2 - \beta^{2n+1} = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ — компоненты тензора напряжений; $\sigma_0 = \frac{\delta_{ij}\sigma_{ij}}{3}$ — среднее напряжение; δ_{ij} — символ Кронекера; m, n — постоянные материала; H, F, G, N, L, M, A — параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии; α, β — функции пористости v (6)

$$\alpha = \frac{1}{4} \left[\frac{3(1-v^{1/3})}{(3-2v^{1/3}) \ln v} \right]^2, \quad \beta = \left[\frac{3(1-v^{1/3})}{3-2v^{1/3}} \right]^2.$$

Параметры H, F, G, N, L, M через текущие пределы текучести $\sigma_{xy}, \dots, \tau_{xy}$, определяемые для частных случаев одноосных растя-

жений в направлениях осей x, y, z и сдвигов между этими осями, выражаются формулами (2)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} - \frac{1}{\sigma_{zT}^2} \right); \\ F &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} - \frac{1}{\sigma_{xT}^2} \right); \\ G &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} - \frac{1}{\sigma_{yT}^2} \right); \\ N &= \frac{1}{2\tau_{xyT}^2}, \quad L = \frac{1}{2\tau_{yzT}^2}, \quad M = \frac{1}{2\tau_{zxT}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для случая изотропного упрочнения (2) будем иметь

$$\sigma_{xT} = h\sigma_{xT0}, \dots, \tau_{zxT} = h\tau_{zxT0} \quad \text{и} \quad (3)$$

$$H = \frac{H_0}{h^2}, \dots, M = \frac{M_0}{h^2},$$

где величины $\sigma_{xT0}, \dots, \tau_{zxT0}, H_0, \dots, M_0$ соответствуют началу пластических деформаций и связаны между собой зависимостями, подобными (2), а h является функцией работы пластической деформации (2).

Предположим, что связь между текущим A и начальным A_0 параметрами анизотропии аналогична выражениям (3) и имеет следующий вид:

$$A = \frac{A_0}{h^2}. \quad (4)$$

Зависимости приращений пластических деформаций от напряжений, согласно ассоциированному закону течения с использованием уравнения (1), представляются в виде

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= \frac{d\lambda}{h^2} \left[H_0(\sigma_x - \sigma_y) + G_0(\sigma_x - \sigma_z) + 3A_0\sigma^m\sigma_0 \right]; \\ d\epsilon_y &= \frac{d\lambda}{h^2} \left[F_0(\sigma_y - \sigma_z) + H_0(\sigma_y - \sigma_x) + 3A_0\sigma^m\sigma_0 \right]; \\ d\epsilon_z &= \frac{d\lambda}{h^2} \left[G_0(\sigma_z - \sigma_x) + F_0(\sigma_z - \sigma_y) + 3A_0\sigma^m\sigma_0 \right]; \\ d\gamma_{xy} &= \frac{2d\lambda}{h^2} N_0\tau_{xy}, \quad d\gamma_{yz} = \frac{2d\lambda}{h^2} L_0\tau_{yz}, \quad d\gamma_{zx} = \frac{2d\lambda}{h^2} M_0\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (5)$$

где $d\lambda$ — множитель Лагранжа.

Понятие эквивалентного напряжения, известное для ортотропного

беспористого ⁽²⁾ и изотропного пористого ⁽⁶⁾ материалов, обобщим на случай ортотропного пористого материала

$$\sigma_{\max} = \left\{ \frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)^{\beta^{2n+1}}} \left[H_0(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N_0\tau_{xy}^2 + 2L_0\tau_{yz}^2 + 2M_0\tau_{zx}^2 + 9A_0\sigma_0^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (6)$$

С учетом (1), (3) и (4) преобразуем выражение (6) к виду

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)}} h. \quad (7)$$

Определим из выражений (5) величины $\sigma_x - \sigma_y$, $\sigma_y - \sigma_z$, $\sigma_z - \sigma_x$, τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , σ_0

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= \frac{h^2}{d_1(H_0F_0 + F_0G_0 + G_0H_0)} \left[F_0(d\varepsilon_x - d\varepsilon_0) - G_0(d\varepsilon_y - d\varepsilon_0) \right]; \\ \sigma_y - \sigma_z &= \frac{h^2}{d_1(H_0F_0 + F_0G_0 + G_0H_0)} \left[G_0(d\varepsilon_y - d\varepsilon_0) - H_0(d\varepsilon_z - d\varepsilon_0) \right]; \\ \sigma_z - \sigma_x &= \frac{h^2}{d_1(H_0F_0 + F_0G_0 + G_0H_0)} \left[H_0(d\varepsilon_z - d\varepsilon_0) - F_0(d\varepsilon_x - d\varepsilon_0) \right]; \\ \tau_{xy} &= \frac{h^2 d\gamma_{xy}}{2d_1 N_0}, \quad \tau_{yz} = \frac{h^2 d\gamma_{yz}}{2d_1 L_0}, \quad \tau_{zx} = \frac{h^2 d\gamma_{zx}}{2d_1 M_0}; \\ \sigma_0 &= \frac{h^2 d\varepsilon_0}{d_1 A_0 \alpha^m}, \end{aligned}$$

где $d\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}}{3}$ — приращение средней деформации.

Подставляя полученные выражения в (6), имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sqrt{\frac{3}{2(H_0 + F_0 + G_0)^{\beta^{2n+1}}} \frac{h^2}{d_1(H_0F_0 + F_0G_0 + G_0H_0)} \left\{ H_0 \left[F_0(d\varepsilon_x - d\varepsilon_0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G_0(d\varepsilon_y - d\varepsilon_0) \right]^2 + F_0 \left[G_0(d\varepsilon_y - d\varepsilon_0) - H_0(d\varepsilon_z - d\varepsilon_0) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + G_0 \left[H_0(d\varepsilon_z - d\varepsilon_0) - F_0(d\varepsilon_x - d\varepsilon_0) \right]^2 + \frac{(H_0F_0 + F_0G_0 + G_0H_0)^2}{2} \left[\frac{(d\gamma_{xy})^2}{N_0} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(d\gamma_{yz})^2}{L_0} + \frac{(d\gamma_{zx})^2}{M_0} + \frac{2(d\varepsilon_0)^2}{A_0 \alpha^m} \right] \right\}^{1/2} \quad (8) \end{aligned}$$

Введем понятие эквивалентного приращения деформации

$$\begin{aligned} \bar{d\varepsilon}_{\max} &= \\ &= \frac{\beta^{2n-0.5}}{H_0F_0 + F_0G_0 + G_0H_0} \sqrt{\frac{2(H_0 + F_0 + G_0)}{3} \left\{ H_0 \left[F_0(d\varepsilon_x - d\varepsilon_0) - G_0(d\varepsilon_y - d\varepsilon_0) \right]^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F_0 [G_0(dz_y - d\varepsilon_0) - H_0(dz_z - d\varepsilon_0)]^2 + G_0 [H_0(dz_z - d\varepsilon_0) - F_0(dz_x - d\varepsilon_0)]^2 + \\
& + \frac{(H_0 F_0 + F_0 G_0 + G_0 H_0)^2}{2} \left[\frac{(d\gamma_{xy})^2}{N_0} + \frac{(d\gamma_{yz})^2}{L_0} + \frac{(d\gamma_{zx})^2}{M_0} + \frac{2(d\varepsilon_0)^2}{A_0 \alpha^m} \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Используя соотношения (7) и (9), из выражения (8) находим

$$d\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{\text{экв.}} d\varepsilon_{\text{экв.}}}{\beta^{3n}}. \tag{10}$$

Подставляя значение $d\varepsilon_0$ в (5) и учитывая соотношение (7), получаем:

$$d\varepsilon_x = \frac{3d\varepsilon_{\text{экв.}}}{2\sigma_{\text{экв.}}(H_0 + F_0 + G_0)\beta^{3n}} \left[H_0(\sigma_y - \sigma_z) - G_0(\sigma_x - \sigma_z) + 3A_0 \alpha^m \sigma_0 \right];$$

$$d\varepsilon_y = \frac{3d\varepsilon_{\text{экв.}}}{2\sigma_{\text{экв.}}(H_0 + F_0 + G_0)\beta^{3n}} \left[F_0(\sigma_x - \sigma_z) + H_0(\sigma_y - \sigma_x) + 3A_0 \alpha^m \sigma_0 \right];$$

$$d\varepsilon_z = \frac{3d\varepsilon_{\text{экв.}}}{2\sigma_{\text{экв.}}(H_0 + F_0 + G_0)\beta^{3n}} \left[G_0(\sigma_z - \sigma_x) + F_0(\sigma_z - \sigma_y) + 3A_0 \alpha^m \sigma_0 \right];$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{3N_0 \gamma_{xy} d\varepsilon_{\text{экв.}}}{\sigma_{\text{экв.}}(H_0 + F_0 + G_0)\beta^{3n}};$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{3L_0 \gamma_{yz} d\varepsilon_{\text{экв.}}}{\sigma_{\text{экв.}}(H_0 + F_0 + G_0)\beta^{3n}};$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{3M_0 \gamma_{zx} d\varepsilon_{\text{экв.}}}{\sigma_{\text{экв.}}(H_0 + F_0 + G_0)\beta^{3n}}. \tag{11}$$

Отметим, что при $\nu = 0$ ($\alpha = 0, \beta = 1$) уравнения (6), (9) и (11) преобразуются к зависимостям теории пластичности ортотропного материала с изотропным упрочнением^(*). Следовательно, подобно теории пластичности ортотропного материала с изотропным упрочнением, можно предположить, что эквивалентное напряжение является функцией интеграла от эквивалентного приращения пластических деформаций

$$\sigma_{\text{экв.}} = \Phi \left(\int d\varepsilon_{\text{экв.}} \right).$$

График этой функции называется диаграммой деформирования материала.

По определению (7), приращение средней деформации имеет вид

$$d\varepsilon_0 = \frac{dv}{3(1-\nu)}. \tag{12}$$

Определяя из уравнения (11) приращение средней деформации и подставляя в (12), получаем

$$dv = \frac{27A_0\alpha^m\sigma_0(1-\nu)d\bar{\epsilon}_{\text{max}}}{2\sigma_{\text{max}}(H_0+F_0+G_0)^{2n}} \quad (13)$$

Таким образом, получены зависимости (6), (9), (11) и (13) теории пластичности пористых ортотропных материалов. В этих уравнениях зависимость параметра анизотропии A_0 от начальных пределов текучести должна удовлетворять условию (4), обеспечивать переход от уравнений (6), (9), (11) и (13) к уравнениям теории течения пористых изотропных материалов (6) и подтверждаться экспериментами. В качестве примера параметр A_0 можно представить в следующем виде:

$$A_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sigma_{1T0}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT0}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT0}^2} \right),$$

Используя формулы (6), (9), (11) и (13), можно построить диаграмму деформирования ортотропного пористого материала испытанием различных образцов.

Формулы, позволяющие определить приращение пористости материала, эквивалентное напряжение и эквивалентное приращение деформации при одноосном растяжении в направлении оси x ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), имеют вид

$$dv = \frac{3A_0\alpha^m(1-\nu)d\epsilon_x}{H_0+G_0+A_0\alpha^m};$$

$$\sigma_{\text{экв.}} = \sqrt{\frac{3(H_0+G_0+A_0\alpha^m)}{2(H_0+F_0+G_0)^{2n+1}}} \sigma_x;$$

$$d\bar{\epsilon}_{\text{экв.}} = \alpha^{2n-0.5} \sqrt{\frac{2(H_0+F_0+G_0)}{3(H_0+G_0+A_0\alpha^m)}} d\epsilon_x.$$

где $\sigma_x = \frac{P}{S}$ — осевое напряжение; $d\epsilon_x$ — приращение осевой пластической деформации; $\epsilon_x = \ln(l/l_0)$ — осевая пластическая деформация; P , S , l — соответственно текущие значения силы, площади поперечного сечения и длины образца; l_0 — начальная длина образца.

Уравнения (14) позволяют по диаграмме растяжения ($\sigma_x - \epsilon_x$), начальному значению пористости ν_0 , трем пределам текучести в направлениях x , y , z и значениям коэффициентов m , n построить диаграмму деформирования материала.

Покажем также возможность построения диаграммы деформирования пористого ортотропного материала испытанием пористых плоских образцов на сжатие в условиях плоской деформации. В этом случае принимается (6), что напряженно-деформированное состояние материала под плитами толщиной a (рис. 1) однородное и двухосное, т. е.

$$d\varepsilon_y = -\frac{d\delta}{\delta}, \quad d\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_x = 0, \quad (15)$$

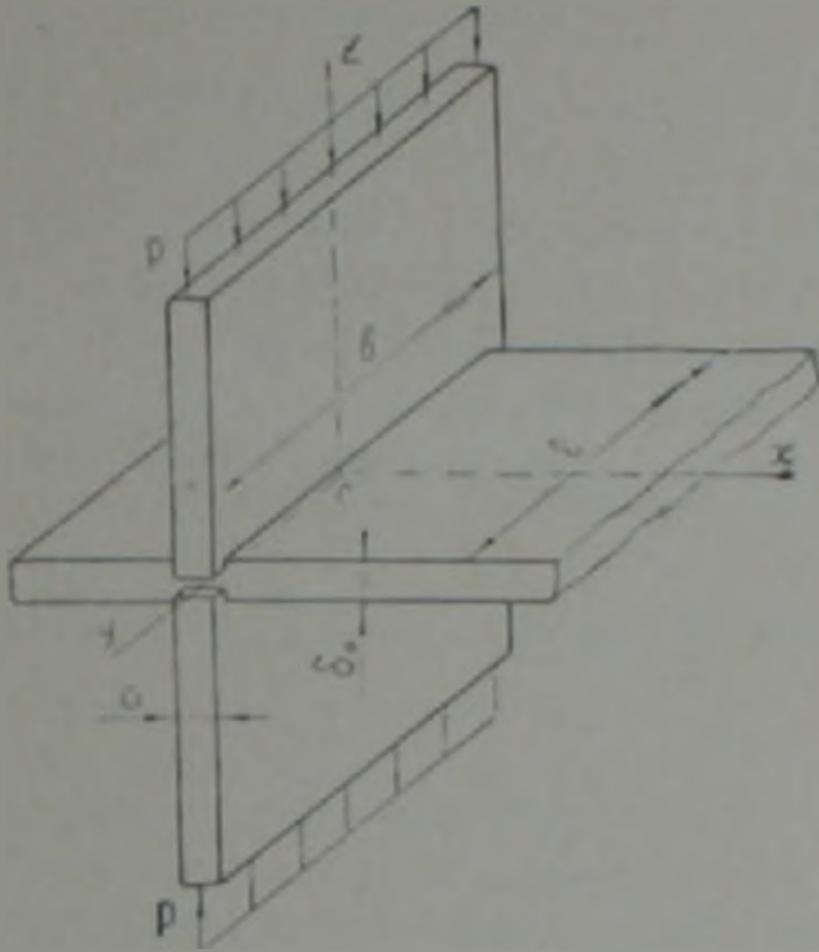


Рис 1 Схема деформирования плоского образца при испытании на сжатие в условиях плоской деформации

где $d\varepsilon_y$ — приращение деформаций образца по направлению сжимающей силы P ; $d\varepsilon_z$ — приращения деформаций в плоскости листа по направлению ширины (l) образца; ε_x — напряжение в плоскости листа по направлению длины образца; δ — текущая толщина образца; $d\delta$ — ее приращение.

Из зависимостей (6), (11) и (13) с учетом выражений (15) получим

$$dv = -\frac{3A_0 z^m (1-\nu)(G_0 + 2F_0)d\delta}{\delta |F_0(G_0 + 2A_0 z^m) + H_0(G_0 + F_0 + A_0 z^m) + A_0 z^m(G_0 + 2F_0)|} \cdot \frac{\sqrt{3B}P}{\delta^{2n-0.5}(G_0 + F_0 + A_0 z^m)\sqrt{H_0 + F_0 + G_0}}; \quad (16)$$

$$d\varepsilon_{max} = \frac{\delta^{2n-0.5}\sqrt{2(H_0 + F_0 + G_0)}B d\delta}{\sqrt{3}\delta |F_0(G_0 + 2A_0 z^m) + H_0(G_0 + F_0 + A_0 z^m) + A_0 z^m(G_0 + 2F_0)|}$$

где

$$B = H_0(G_0 + F_0 + A_0 z^m)^2 + F_0(G_0 + 2A_0 z^m)^2 + G_0(F_0 - A_0 z^m)^2 + A_0 z^m(G_0 + 2F_0)^2.$$

Подобно (9), для заданных начальных механических характеристик материала ($\nu_0, m, n, \sigma_{y0}, \sigma_{yT0}, \sigma_{zT0}$), различных значений сжимающей силы P и соответствующей текущей толщины образца δ по формулам (16) определяем величины $dv, \varepsilon_{max}, d\varepsilon_{max}$ и строим диаграмму деформирования материала.

Իզոտրոպ ամրապնդմամբ օրթոտրոպ ծակոտկեն նյութի պլաստիկության տեսություն

Հոդվածում բերված է իզոտրոպ ամրապնդմամբ օրթոտրոպ ծակոտկեն նյութի պլաստիկության տեսության մի դեպք, որը հանդիսանում է օրթոտրոպ ոչ ծակոտկեն նյութի պլաստիկության տեսության և իզոտրոպ ծակոտկեն նյութի պլաստիկության տեսության ընդհանրացումը:

Ստացվել են բանաձևեր կառուցելու համար նյութի դեֆորմացման գրաֆիկը և որոշելու նրա ընթացիկ ծակոտկենությունը հարթ նմուշի հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում սեղմման և կլոր նմուշի ձգման դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. В. Скороход, в кн. Порошковая металлургия-77, «Наукова думка», Киев, 1977. ² Н. Н. Малинин, Прикладная теория пластичности и ползучести, «Машиностроение», М., 1975. ³ Ж. Л. Петросян, Х. Л. Петросян, Изв. вузов. Машиностроение, № 1, 1974. ⁴ Р. Хилл, Математическая теория пластичности, ГИИТЛ, М., 1956. ⁵ Г. Л. Петросян, Изв. вузов. Машиностроение, № 5, 1977. ⁶ Г. Л. Петросян, Тезисы докладов XIX научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава вузов Закавказских республик, посвященной 60-летию Великой Октябрьской социалистической революции (4—7 апреля 1977), Тбилиси, 1977. ⁷ Р. Дж. Грим, в сб переводов: Механика, «Мир», М., № 4 (140), (1973). ⁸ Г. Л. Петросян, Х. Л. Петросян, М. З. Погосян, «Порошковая металлургия», 1977, № 11.