ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 3

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Р. А. Багиян

О совпадении двух систем функций, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/V 1980)

1. Как известно (1), целая функция типа Миттаг-Леффлера определяется посредством разложения

$$E_\rho(z, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}, \quad (\rho>0, \ -\infty<\mu<+\infty) \tag{1}$$

которое при $\mu=1$ совпадает с самой функцией $E_\rho(z)$. В совместной с М. М. Джрбашяном работе автора (2) было установлено следующее важное представление этой функции во всей комплексной плоскости:

$$E_\rho(z, \mu)=\int_0^{\infty} e^{z\tau}\Phi_{(\rho,\mu)}(\tau)d\tau, \quad (1<\rho<\infty, \ -\infty<\mu<+\infty), \tag{2}$$

где $\Phi_{\rho,\mu}(\tau)$ — подробно исследованная функция. С произвольной неубывающей последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ в статье автора (3) ассоциирована система функций

$$\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x)=\left[\Gamma(\mu)\prod_{j=k+1}^{n}\lambda_j\right]x^{\rho(1-\mu)}\frac{\rho}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{x^{1/\rho}\xi}\xi^{\rho(1-\mu)}}{\prod\limits_{j=k}^{n}(\xi+\lambda_j)}\,d\xi, \tag{3}$$

где контур γ охватывает все особенности подынтегральной функции. Важнейшие свойства этой системы функций, лежащие в основе построения в (3) квазиполиномов типа Бернштейна — Хаусдорфа, следующие:

а) Для значений параметров $1<\rho<+\infty$, $\frac{1}{\rho}<\mu<+\infty$ функции $\{\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x)\}$ непрерывны, неотрицательны на замкнутой полуоси $[0, +\infty[$. При $\lambda_1=0$

$$\sum_{k=0}^{n} \omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x) \equiv 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant +\infty, \tag{4}$$

причем

$$0 \leqslant \omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x) \leqslant 1. \tag{5}$$

б) Система функций (3) связана с системой функций $\{\omega_{n,k}(x) = \omega_{n,k}^{(1,1)}(x)\}$ следующими равенствами:

$$\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} \omega_{n,k}(xt)\Phi_{\rho,\mu}(t)dt, \tag{6}$$

где $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ функция из представлений (2).

в) Для любого $n(1 \leqslant n < \infty)$ и $\lambda \in (0, +\infty)$ справедливо следующее тождество:

$$E_\rho(-\lambda x, \mu) = \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{\Gamma(\mu)} \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right\} \omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x) + R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda), \tag{7}$$

где

$$R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda) = x^{\rho(1-\mu)} \left\{\prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda)\right\} \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{x^\rho \xi} \xi^{\rho(1-\mu)}}{(\xi+\lambda)\prod_{j=1}^{n}(\xi+\lambda_j)} d\xi. \tag{8}$$

2. В статье ([4]) рассматривается базисность системы функций

$$\varphi_0(t) = E_\rho(t\lambda_1), \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{E_\rho(tz)}{(z-\lambda_{n+1})\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)} dz, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где C_n замкнутый жордановый контур, содержащий внутри себя точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$; $E_\rho(\xi)$ — функция Миттаг-Леффлера, а последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что

$$\lambda_n > 0, \ (n = 1, 2, \ldots), \ \lambda_n \sim n^{\frac{1}{\rho}} \ (0 < \rho < +\infty, \ n \to \infty). \tag{10}$$

Базисность системы устанавливается в определенной области $G_1 \subset G$, где система функций $\{\varphi_n(t)\}_1^{\infty}$ регулярна. Доказывается, что любая функция $F(t)$, регулярная в G_1, представляется внутри этой области, т. е. на любом компакте $K \subset G_1$, равномерно сходящимся рядом

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(t),$$

причем это представление единственно.

В частности, для функции Миттаг-Леффлера получено представление

$$E_{\rho}(zt) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\{ \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \right\}, \tag{11}$$

где $a_k = \varphi_k(t)$ $(1 \leq k < +\infty)$.

3. В данной заметке показывается полное совпадение системы функций (9) с введенными ранее автором в статье (3) агрегатами, служащими для построения квазиполиномов типа Бернштейна—Хаусдорфа, ассоциированными с функциями типа Миттаг-Леффлера, и приводится ряд следствий в связи с этим фактом. Для решения поставленной задачи прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ *—произвольная неубывающая последовательность*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

Тогда для любого n $(1 \leq n < +\infty)$ *и* $\lambda \in (0, +\infty)$ *имеет место*

$$E_{\rho}(-\lambda x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_k^{(\rho,\mu)}(x) + R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda) \tag{12}$$

где

$$\omega_k^{(\rho,\mu)}(x) = \Gamma(\mu) \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{x^{\rho}\xi^{\rho}}\xi^{\rho(1-\mu)}}{\prod_{j=1}^{k} (\xi + \lambda_j)} d\xi \tag{13}$$

а $R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda)$ *определяется посредством* (8).

Доказательство. Как легко следует из выражения (8) функции $R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda)$, при замене λ_j через λ_{n-j+1} $(1 \leq j \leq n)$ она не изменяется. Поэтому из (7) следует также, что

$$E_{\rho}(-\lambda x, \mu) - R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{n-j+1}}\right) \right\} \omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x),$$

где

$$\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x) = \Gamma(\mu) x^{\rho(1-\mu)} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{x^{\rho}\xi^{\rho}}\xi^{\rho(1-\mu)}}{(\xi + \lambda_k) \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_{n-j+1}}\right)} d\xi.$$

Отсюда заменой $n - j + 1$ через j получим

$$E_{\rho}(-\lambda x, \mu) - R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{n-k} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x),$$

где

$$\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x) = \Gamma(\mu) x^{\rho(1-\mu)} \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{x^{\rho}\xi^{\rho}}\xi^{\rho(1-\mu)}}{(\xi + \lambda_k) \prod_{j=1}^{n-k} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_j}\right)} d\xi.$$

И окончательно

$$E_\rho(-\lambda x, \mu) - R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_k^{(\rho,\mu)}(x);$$

$$\omega_k^{(\rho,\mu)}(x) = \Gamma(\mu) x^{\rho(1-\mu)} \frac{\rho}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{x^{1/\rho}\xi^{\rho}(1-\mu)}}{(\xi + \lambda_k) \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_j}\right)} d\xi,$$

откуда следует утверждение (12) леммы.

В статье автора (²) было доказано, что при условии $\sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j^{-1} = +\infty$ равномерно по $x \in [0, +\infty]$ и $\lambda \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \to \infty} R_n^{(\rho,\mu)}(x, \lambda) = 0.$$

Отсюда из утверждения (12) леммы и тождества (7) следует, что к функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(-\lambda x, \mu)$ сходятся как квазиполиномы

$$B_n[E_\rho(-\lambda x, \mu)] = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x), \qquad (14)$$

так и квазиполиномы

$$\tilde{B}_n[E_\rho(-\lambda x, \mu)] = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_k^{(\rho,\mu)}(x), \qquad (15)$$

где $\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x)$ и $\omega_k^{(\rho,\mu)}(x)$ определяются соответственно из (3) и (13). Отметим, что если здесь положить $\rho = \mu = 1$, то получатся известные агрегаты Ф. Хаусдорфа, дающие приближение к функции $e^{-\lambda x}$.

Теорема. *При $\mu = 1$ система функций (13), служащая для построения квазиполиномов типа Бернштейна—Хаусдфора, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера, тождественна с системой функций (9), т. е.*

$$\omega_{k+1}^{(\rho,1)}(x) = \varphi_k(-x), \ k = 0, 1, 2, \ldots, \ x \in [0, +\infty].$$

Доказательство. Положив в тождестве (12) $\rho = \mu = 1$, будем иметь

$$e^{-\lambda x} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_k^{(1,1)}(x) + R_n^{(1,1)}(x, \lambda), \qquad (16)$$

где

$$\omega_k^{(1,1)}(x) \equiv \omega_k(x) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{x\xi}}{\prod_{j=1}^{k} (\xi + \lambda_j)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{x\xi}}{(\xi + \lambda_k) \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_j}\right)} d\xi.$$

В (16), изменив индексацию ($k - 1 = s$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$), получим

$$e^{-\lambda x} = \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \right\} \omega_{s+1}(x) + R_n^{(1,1)}(x, \lambda), \qquad (16')$$

где

$$\omega_{s+1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{x\xi}d\xi}{(\xi+\lambda_{s+1})\prod_{j=1}^{s}\left(1+\frac{\xi}{\lambda_j}\right)}. \tag{17}$$

С другой стороны, положив в (9) $\rho=1$, получим

$$a_k'=\varphi_k^{(1)}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{e^{zt}dz}{(z-\lambda_{k+1})\prod_{j=1}^{s}\left(1-z/\lambda_j\right)}. \tag{18}$$

Сравнивая (17) с (18), убеждаемся в полной аналогии, т. е.

$$\varphi_k^{(1)}(-x)=\omega_{k+1}(x),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Для того, чтобы получить утверждение теоремы, достаточно в (17) вместо x взять xt, умножить на $\Phi_{\rho,\mu}(t)dt$ и проинтегрировать от 0 до ∞, с последующим использованием представлений (6) и (2). Тогда получим

$$\omega_{k+1}^{(\rho,\mu)}(x)=\int_0^{\infty}\omega_{k+1}(xt)\Phi_{\rho,\mu}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\{\int_0^{\infty}e^{xt\xi}\Phi_{\rho,\mu}(t)dt\}d\xi}{(\xi+\lambda_{k+1})\prod_{j=1}^{k}\left(1+\xi/\lambda_j\right)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{E_\rho(x\xi,\ \mu)d\xi}{(\xi+\lambda_{k+1})\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{\xi}{\lambda_j}\right)}$$

что при $\mu=1$ совпадает с функциями $\varphi_k(-x)$. Одновременно установлена тождественность приближающих квазиполиномов $\bar{B}_n[E_\rho(-\lambda x,\ \mu)]$ или, что то же самое, $B_n[E_\rho(-\lambda x,\mu)]$, с разложением (11) при $n\to\infty$.

Доказанная теорема позволяет дополнить ряд результатов, касающихся приближения квазиполиномами типа Бернштейна—Хаусдорфа, ассоциированными с функциями Миттаг-Леффлера. Действительно, с помощью этой теоремы осуществляется переход указанных приближающих агрегатов, рассмотренных в статье автора [3], с действительной оси в специальные области комплексной плоскости, рассмотренных в [4]. Далее приближение у нас получено при $\rho\geqslant 1$ (случай $\rho=1$ классический, рассмотренный Хаусдорфом в (5)). При этом условии система функций $\{\omega_{n,k}^{(\rho,\mu)}(x)\}$, как легко следует из (4, 5), сохраняет свойства известных агрегатов Бернштейна—Хаусдорфа. А вот при $0<\rho<1$ эти свойства нарушаются, и тем не менее в силу результата авторов статьи [4] приближение имеет место и в этом случае, конечно, если последовательность лишь типа

$$\lambda_n>0,\ \lambda_n\sim n^{1/\rho},\ 0<\rho<1,\ n\to\infty.$$

Таким образом, в этом случае квазиполиномы типа Бернштейна—Хаусдорфа, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера, дают приближение и при условии $\sum_1^{\infty}\lambda_n^{-\rho}=+\infty$, в то время как ряд

$\sum_{1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ может сходиться, что не имеет места в случае приближения на полуоси $[0, +\infty]$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ

Միտտագ-Լեֆֆլերի տիպի ֆունկցիաների հետ ասոցիացված ֆունկցիաների երկու համակարգերի համրնկնելիության մասին

Ներկա աշխատանքում ցույց է տրվում ([1]) հոդվածի $\{\varphi_k(t)\}$ ֆունկցիաների համակարգի և հեղինակի կողմից ներմուծված ([3]) հոդվածում ագրեգատների, որոնք ծառայում են Միտտագ-Լեֆֆլերի տիպի ֆունկցիաների հետ ասոցիացված Բեռնշտեյն—Հաուսդորֆի տիպի քվազիպոլինոմների կառուցմանը, լրիվ համրնկնելիությունը.

Բերվում են մի շարք հետևանքներ այդ փաստի կապակցությամբ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [2] *М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян*, ДАН СССР, т. 223, № 6 (1975). [3] *Р. А. Багиян*, ДАН АрмССР, т. 61, № 3 (1975). [4] *В. А. Осколков, С. А. Абдрашитова*, Сиб. матем. журн., т. 19, № 1 (1978). [5] *F. Hausdorf*, Math. z., vol. 9, № 1,II (1921).