ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 3

УДК 517.44

МАТЕМАТИКА

С. С. Казарян

Об асимптотическом поведении некоторых интегралов Фурье с логарифмическими особенностями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 8/V 1980)

В вопросах математической физики часто возникает необходимость исследовать асимптотическое поведение интегралов Фурье

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(\lambda^2 - k^2) \cos \lambda z \, d\lambda \quad (z \to \infty). \tag{1}$$

Асимптотическое представление интегралов Фурье, неосциллирующая часть подынтегральной функции которых имеет конечное число особых точек типа

$$(t - a_i)^{\lambda - 1} \ln (t - a_i) \quad (0 < \lambda \leqslant 1)$$

было получено в работах [1,2]. Но метод, использованный в этих работах, применим только тогда, когда подынтегральная функция имеет явный вид в интервале интегрирования. Задача о получении асимптотик интегралов (1), поведение подынтегральных функций которых известно только в окрестности особой точки, для определенного типа несобственных интегралов Фурье была решена в работе [3].

В настоящей заметке получено асимптотическое поведение интеграла (1), подынтегральная функция которого в окрестности точки $\lambda = k$ $(0 < k \leqslant 1)$ имеет особенность типа

$$\Phi(\lambda^2 - k^2) \ln^j (\lambda^2 - k^2) \quad (j = 1, 2, 3),$$

где Φ—аналитическая функция.

Эта задача легко сводится к рассмотрению интеграла

$$\int_L \Phi(w^2 - k^2) \ln^j (w^2 - k^2) e^{iwz} dw, \tag{2}$$

где w изменяется в комплексной плоскости.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(w^2-k^2)$ — аналитическая функция. Тогда для любого натурального M имеют место следующие асимптотические разложения при $z\to\infty$*

$$\int\limits_{L_{\varphi_j}}\Phi(w^2-k^2)\ln(w^2-k^2)\,e^{iwz}\,dw=(-1)^j\,ie^{ikz}\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\frac{d^m\Phi(2iky-y^2)}{dy^m}\Psi_1(z,m)+\right.$$

$$\left.+\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln(2ik-y)]}{dy^m}\right\}\Bigg|_{y=0}\frac{1}{z^{m+1}}+O\left(\frac{\ln z}{z^{M+1}}\right);\tag{3}$$

$$\int\limits_{L_{\varphi_j}}\Phi(w^2-k^2)\ln^2(w^2-k^2)e^{iwz}dw=(-1)^j ie^{ikz}\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\frac{d^m\Phi(2iky-y^2)}{dy^m}\Psi_2(z,m)+\right.$$

$$+2\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln(2ik-y)]}{dy^m}\Psi_1(z,m)+$$

$$\left.+\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln^2(2ik-y)]}{dy^m}\right\}\Bigg|_{y=0}\frac{1}{z^{m+1}}+O\left(\frac{\ln^2 z}{z^{M+1}}\right);\tag{4}$$

$$\int\limits_{L_{\varphi_j}}\Phi(w^2-k^2)\ln^3(w^2-k^2)e^{iwz}dw=(-1)^j ie^{ikz}\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\frac{d^m\Phi(2iky-y^2)}{dy^m}\Psi_3(z,m)+\right.$$

$$+3\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln(2ik-y)]}{dy^m}\Psi_2(z,m)+$$

$$+3\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln^2(2ik-y)]}{dy^m}\Psi_1(z,m)+$$

$$\left.+\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln^3(2ik-y)]}{dy^m}\right\}\Bigg|_{y=0}\frac{1}{z^{m+1}}+O\left(\frac{\ln^3 z}{z^{M+1}}\right)\tag{5}$$

где $j=1,2$,

$$\Psi_1(z,m)=\psi(m)-\ln z;\tag{6}$$

$$\Psi_2(z,m)=[\psi(m)-\ln z]^2+\zeta(2,m-1);\tag{7}$$

$$\Psi_3(z,m)=[\psi(m)-\ln z]^3+[2\psi(m)-3\ln z]\zeta(2,m-1)-2\zeta(3,m-1);\tag{8}$$

$\psi(m)$ — *логарифмическая производная Г-функции;*
$\zeta(n,m)$ — *дзета-функция Римана.*

Причем L_{φ_2}, $-L_{\varphi_1}$ — *отрезки лучей, выходящие из точки* $(k,0)$ *и составляющие с действительной осью комплексной плоскости* w *соответственно углы* φ, $\pi-\varphi$ $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство теоремы 1. Возьмем линию L в качестве контура интегрирования, состоящую из отрезка L_{φ_2} длины $a-r$, дуг окружностей радиусов a,r $(r<a)$ с центром в точке $(k,0)$ и отрезка, соединяющего точки (k,r) и (k,a). Тогда в силу интегральной теоремы Коши при $r\to 0$ получаем:

$$\int_{L_{\psi_2}} \Phi(w^2-k^2)\ln(w^2-k^2)e^{iwz}dw = ie^{ikz}\int_0^a \Phi(2iky-y^2)[\ln y+\ln(2ik-y)]e^{-yz}dy -$$

$$-iae^{ikz}\int_\psi^{\pi/2}\Phi(2ake^{i\varphi}+a^2e^{2i\varphi})\ln(2ake^{i\varphi}+a^2e^{2i\varphi})e^{i(az\cos\varphi+\varphi)}e^{-az\sin\varphi}d\varphi. \qquad (9)$$

Для интеграла с интервалом интегрирования $(\psi, \pi/2)$ имеет место следующее неравенство:

$$\left|\int_\psi^{\pi/2}\Phi(2ake^{i\varphi}+a^2e^{2i\varphi})\ln(2ake^{i\varphi}+a^2e^{2i\varphi})e^{i(az\cos\varphi+\varphi)}e^{-az\sin\varphi}d\varphi\right| \le$$

$$\le e^{-az\sin\psi}\int_\psi^{\pi/2}\left|\Phi(2ake^{i\varphi}+a^2e^{2i\varphi})\ln(2ake^{i\varphi}+a^2e^{2i\varphi})\right|d\varphi, \qquad (10)$$

так как $\psi<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Откуда следует, что соответствующий интеграл экспоненциально стремится к нулю при $z\to\infty$. Чтобы оценить интеграл с интервалом интегрирования $(0, a)$, докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $f(t)$ непрерывна при $t\geqslant0$ и M—кратно дифференцируемая функция в окрестности точки $t=0$. Пусть также $|f(t)|<Ke^{bt}$, при $t>\delta$ ($\delta>0$), где K и b положительные числа, не зависящие от t. Тогда для любого $a>0$*

$$\int_0^a e^{-zt}t^{\nu-1}\ln^j t\, f(t)dt = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{\Gamma(m+\nu)}{z^{m+\nu}}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\Psi_j(z, m+\nu) +$$

$$+O\left(\frac{\ln^j z}{z^{M+\nu}}\right)\ (j=0, 1, 2, 3), \qquad (11)$$

где $\Psi_0(z, m)=1$, а $\Psi_j(z, m)$ $(j=1, 2, 3)$ определяется соотношениями (6)—(8).

Доказательство. Отметим, что при $j=0$ эта лемма является хорошо известной леммой Ватсона [4].

Для произвольного положительного числа M мы можем выбрать такую постоянную $C>0$, при которой выполняется неравенство

$$\left|f(t)-\sum_{m=0}^{M-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}t^m\right|\leqslant Ce^{bt}t^M \quad (t>0), \qquad (12)$$

где $\frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ коэффициенты ряда Тейлора функции $f(t)$ в окрестности точки $t=0$.

Очевидно, что

$$\int_0^a e^{-zt}t^{\nu-1}\ln^l t\cdot f(t)dt=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\int_0^\infty e^{-zt}t^{m+\nu-1}\ln^l t\,dt-$$

$$-\sum_{m=0}^{M-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\int_a^\infty e^{-zt}t^{m+\nu-1}\ln^l t\,dt+R_M, \qquad (13)$$

где

$$R_M=\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1}\ln^l t\left[f(t)-\sum_{m=0}^{M-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}t^m\right]dt-\int_a^\infty e^{-zt}t^{\nu-1}\ln^l t\left[f(t)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{M-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}t^m\right]dt.$$

Известно ([5]), что

$$\int_0^\infty e^{-zt}t^{m+\nu-1}\ln^l t\,dt=\frac{\Gamma(m+\nu)}{z^{m+\nu}}\Psi_l(z,\ m+\nu). \qquad (14)$$

Используя неравенство (12), получим

$$\left|\int_0^a e^{-(z-b)t}t^{M+\nu-1}\ln^l t\,dt\right|=O\left(\frac{\ln^l z}{z^{M+\nu}}\right)\ \ (z\to\infty). \qquad (15)$$

Учитывая, что в выражении (13) интегралы с интервалом интегрирования $(a,\ \infty)$ экспоненциально стремятся к нулю при $z\to\infty$, и подставив (14), (15) и (13), получим асимптотическое разложение (11). Лемма доказана.

Воспользовавшись этой леммой, из соотношения (9) непосредственно найдем

$$\int_{L_{0_2}}\Phi(w^2-k^2)\ln(w^2-k^2)e^{iwz}dw=ie^{ikz}\sum_{k=0}^{M-1}\left\{\frac{d^m\Phi(2iky-y^2)}{dy^m}\Psi_1(z,\ m)+\right.$$

$$\left.+\frac{d^m[\Phi(2iky-y^2)\ln(2ik-y)]}{dy^m}\right\}_{y=0}\frac{1}{z^{m+1}}+O\left(\frac{\ln z}{z^{M+1}}\right).$$

Аналогично доказываются асимптотические разложения (4) и (5). Теорема 1 доказана.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ս. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

Լոգարիթմական եզակիություններ ունեցող Ֆուրյեի որոշ ինտեգրալների ասիմպտոտիկական վարքի մասին

Հոդվածում ուսումնասիրված է (1) տիպի Ֆուրյեի ինտեգրալները, որոնց ենթաինտեգրալային ֆունկցիան $\lambda = k$ $(\alpha \leqslant k \leqslant \beta)$ *կետում ունի*

$$\Phi(\lambda^2 - k^2)\ln^j(\lambda^2 - k^2) \quad (j = 1, 2, 3)$$

տիպի եզակիություն. Φ — անալիտիկ ֆունկցիա է։ Գտնված է այդ ինտեգրալների ասիմպտոտիկական վարքը, երբ $z \to \infty$*։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի որոշակի խնդիրների լուծման համար։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Эрдейи*, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962. [2] *A. Erdelyi*, J. Soc. Ind appl. Math., vol. 4, 1956. [3] *В. И. Дмитриев, С. С. Казарян*, в сб.: Численные методы в геофизических исследованиях, Изд-во МГУ, М., 1979. [4] *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, М., 1949. [5] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.