

УДК 512.86

МАТЕМАТИКА

А. Д. Тунисев

Обобщение методов исключения и полного исключения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 17/IV 1980)

В данной работе предлагаются методы решения линейных алгебраических систем, основанные на идее выбора не одного направляющего элемента, как это, например, делается в методе исключения Гаусса, а одновременно нескольких элементов — *направляющего вектора*.

Приведем необходимые обозначения из (¹). Вектор $x = |x_i|_{i \in N}$ будем обозначать $x[N]$. Компоненту вектора, имеющую индекс i , будем обозначать $x[i]$. Символ $A[M, N]$ будет обозначать матрицу, индексы строк которой пробегают множество M , а индексы столбцов — N . Нулевую матрицу будем обозначать $0[M, N]$. Скалярное произведение, умножение строк, столбцов и матриц записывается по обычным правилам.

1. Теоретическая основа. Обозначим $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$a_i[N]x[N] = b[i], \quad i \in M, \quad (1.1)$$

где $a_i[N]$ — вектор-строка, $x[N]$ — неизвестный вектор-столбец.

Пусть $K \subseteq N$ и $a_{i_0}[K] \neq 0[K]$, $i_0 \in M$. Определим

$$a_i'[N] = a_i[N] + \alpha_i a_{i_0}[N], \quad i \in M,$$

$$b'[i] = b[i] + \alpha_i b[i_0], \quad i \in M,$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(K) = - \frac{(a_i[K], a_{i_0}[K])}{(a_{i_0}[K], a_{i_0}[K])}, \quad i \in M$$

Теорема 1.1. Если $(x[K], x[N \setminus K])$ — решение системы (1.1), то $(y[K], x[N \setminus K])$ — решение системы

$$a_i'[K]y[K] + a_i'[N \setminus K]x[N \setminus K] = b'[i], \quad i \in M. \quad (1.2)$$

где $y[K] = x[K] + \lambda a_{i_0}^T[K]$, $\lambda \in R^1$, и наоборот. Если $(y[K], x[N \setminus K])$ решение (1.2), то $x[N]$ решение (1.1), где

$$x[K] = y[K] + \frac{b[i_0] - a_{i_0}[K]y[K] - a_{i_0}[N \setminus K]x[N \setminus K]}{(a_{i_0}[K], a_{i_0}[K])} a_{i_0}^T[K]. \quad (1.3)$$

Доказательство теоремы можно провести, например, методом подстановки.

Следствие 1.1. Пусть $M_0 \subseteq M$. Тогда система (1.1) и система

$$\begin{cases} a_{i_0}[N]x[N] = b[i_0], \\ a_i^*[N]x[N] = b^*[i], \quad i \in M_0, \\ a_i[N]x[N] = b[i], \quad i \in M \setminus M_0 \end{cases}$$

эквивалентны в смысле множества решений.

2. Обобщение метода исключения. Рассмотрим метод решения системы (1.1), основанный на следствии 1.1, при условии, что M_0 одноэлементное множество.

В предлагаемом методе каждая итерация состоит из малого шага, когда относительно выбранной системы векторов идет процесс частичной ортогонализации, и большого шага, когда процесс частичной ортогонализации закончен и преобразованию подлежат остальные непреобразованные элементы системы, рассматриваемой на данной итерации.

Первая итерация. 1°. Пусть $K_1 \subset N$. Полагаем

$$a_1^*[N] = a_1[N], \quad b^*[1] = b[1].$$

2°. На s -ом ($s \geq 2$) шаге находим элементы

$$\begin{aligned} a_s^*[N] &= a_s[N] + \sum_{i=1}^{s-1} x_i a_i^*[N], \\ b^*[s] &= b[s] + \sum_{i=1}^{s-1} x_i b^*[i], \end{aligned}$$

где

$$x_i = a_i(K_1) = - \frac{(a_i[K_1], a_i^*[K_1])}{(a_i^*[K_1], a_i^*[K_1])}, \quad i = 1, 2, \dots, s-1.$$

3°. Обозначим $R_1 = \{1, 2, \dots, r_1\}$, где r_1 ранг системы векторов $\{a_i[K_1]\}_{i \in M}$. Если $s < r_1$, то переходим к п. 2°, где вместо s берем $(s+1)$. Если $s = r_1$, то считаем малый шаг законченным.

4°. Определяем

$$a_s^*[N] = a_s[N] + \sum_{i \in R_1} x_i a_i^*[N], \quad s \in M \setminus R_1.$$

* Так как эта система векторов подвергается процессу ортогонализации, то ранг ее определяется в ходе ортогонализации.

$$b^1[s] = b[s] + \sum_{i \in R_1} x_i b^1[i], \quad s \in M \setminus R_1,$$

где

$$x_i = a_i(K_1) = - \frac{(a_i[K_1], a[K_1])}{(a[K_1], a[K_1])}, \quad i \in R_1,$$

и считаем большой шаг законченным.

Обозначим $N_1 = N \setminus K_1$, $M_1 = M \setminus R_1$. Тогда в результате первой итерации получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]x[K_1] + a_i^1[N_1]x[N_1] = b^1[i], & i \in R_1, \\ a_i^1[N_1]x[N_1] = b^1[i], & i \in M_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

в которой система векторов $\{a_i^1[K_1]\}_{i \in R_1}$ ортогональная.

Вторая итерация. Пусть $K_2 \subset N_1$, $R_2 = \{r_1+1, r_1+2, \dots, r_2\}$, где $(r_2 - r_1)$ ранг $\{a_i^1[K_2]\}_{i \in R_2}$. Организовав процесс аналогичным образом, после второй итерации будем иметь

$$\begin{cases} a_i^1[K_1]x[K_1] + a_i^1[N_1]x[N_1] = b^1[i], & i \in R_1, \\ a_i^2[K_2]x[K_2] + a_i^2[N_2]x[N_2] = b^2[i], & i \in R_2, \\ a_i^2[N_2]x[N_2] = b^2[i], & i \in M_2, \end{cases}$$

где $N_2 = N_1 \setminus K_2$, $M_2 = M_1 \setminus R_2$, при этом система $\{a_i^2[K_2]\}_{i \in R_2}$ ортогональная.

Продолжая эту процедуру, через τ ($\tau \leq \min(m, n)$) итерации получим

$$a_i^s[K_s]x[K_s] + a_i^s[N_s]x[N_s] = b^s[i], \quad i \in R_s, \quad s = 1, 2, \dots, \tau.$$

Здесь K_s , R_s и N_s имеют тот же смысл, что и при $s = 1, 2$.

Теперь при произвольном $x[N_s] = x^0[N_s]$ обратным ходом определяем все „куски“ решения $x^0[N]$, где s -ый „кусок“

$$x^0[K_s] = \sum_{i \in R_s} \frac{b^s[i] - a_i^s[N_s]x^0[N_s]}{(a_i^s[K_s], a_i^s[K_s])} a_i^{sT}[K_s] \quad (s = 1, 2, \dots, \tau).$$

Отметим, что неразрешимость системы (1.1) определяется так же, как и в методе исключения.

Замечание 2.1. Пусть в рассматриваемой процедуре $K_\tau = N$, ранг (1.1) равен r_1 . Тогда после первой итерации вектор

$$x^0[N] = \sum_{i \in R_1} \frac{b^1[i]}{(a_i^1[N], a_i^1[N])} a_i^{1T}[N]$$

не только частное, но и нормальное решение, которое, как известно, является единственным ⁽²⁾.

3. Обобщение метода полного исключения. Эта процедура отличается от процедуры 2 тем, что на большом шаге каждой итерации преобразованию подлежат не только элементы, стоящие ниже соответствующей строки, но и элементы, стоящие выше нее.

Более точно, пусть согласно процедуре 2 на первой итерации получена система (2.1). Теперь продолжим вторую итерацию по процедуре 2, при этом на большом шаге определим элементы

$$a_i^2[N] = a_i^1[N] + \sum_{l \in R_1} \alpha_l a_l^1[N], \quad s \in M, \quad (3.1)$$

$$b^2[s] = b^1[s] + \sum_{l \in R_1} \alpha_l b^1[l], \quad s \in M, \quad (3.2)$$

где

$$\alpha_l = \alpha_l(K_2) = - \frac{(a_i^1[K_2], a_l^1[K_2])}{(a_l^1[K_2], a_l^1[K_2])}, \quad l \in R_2.$$

В результате второй итерации имеем*:

$$\begin{cases} a_l^2[K_1]x[K_1] + a_l^2[K_2]x[K_2] + a_l^2[N_2]x[N_2] = b^2[l], & l \in R_1, \\ a_l^2[K_2]x[K_2] + a_l^2[N_2]x[N_2] = b^2[l], & l \in R_2, \\ a_l^2[N_2]x[N_2] = b^2[l], & l \in M_2. \end{cases}$$

При такой организации вычислительного процесса через τ итераций получим эквивалентную систему вида

$$\sum_{l=1}^{\tau} a_l^s[K_i]x[K_i] + a_l^s[N_s]x[N_s] = b^s[l], \quad l \in R_s, \quad s = 1, 2, \dots, \tau.$$

Система векторов $\{a_l^s[K_i]\}_{l \in R_s}$ ортогональная, допустим, она ортонормирована. Обозначим $A[R_s, K_i]$ матрицу, состоящую из системы векторов $\{a_l^s[K_i]\}_{l \in R_s}$, $A[R_s, N_s]$ из $\{a_l^s[N_s]\}_{l \in R_s}$ и вектор-столбец $b[R_s]$ из $\{b^s[l]\}_{l \in R_s}$ ($l = s, s+1, \dots, \tau$; $s = 1, 2, \dots, \tau$). Теперь помножим слева $A^T[R_s, K_i]$ на $A[R_s, K_i]$, $A[R_s, N_s]$, $b[R_s]$, и пусть $X^0[K_s, K_i]$, $X^0[K_s, N_s]$ и $x^0[K_s]$ ($l = s, s+1, \dots, \tau$; $s = 1, 2, \dots, \tau$) соответственно результаты этого умножения. Тогда окончательно имеем:

$$\sum_{l=1}^{\tau} X^0[K_s, K_i]x[K_i] + X^0[K_s, N_s]x[N_s] = x^0[K_s], \quad s = 1, 2, \dots, \tau. \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Обозначим $K = \bigcup_{l=1}^{\tau} K_l$, $x_0^0[K] = x^0[K]$, $a_0[M] = b[M]$. Тогда произвольный вектор-столбец $x^0[K] = (x^0[K_1], x^0[K_2], \dots, x^0[K_{\tau}])$ расширенной матрицы системы (3.3) является собственным вектором матрицы

$$X^0[K, K] = \begin{bmatrix} X^0[K_1, K_1], X^0[K_1, K_2], \dots, X^0[K_1, K_{\tau}] \\ 0[K_2, K_1], X^0[K_2, K_2], \dots, X^0[K_2, K_{\tau}] \\ \vdots \\ 0[K_{\tau}, K_1], 0[K_{\tau}, K_2], \dots, X^0[K_{\tau}, K_{\tau}] \end{bmatrix}$$

с собственным значением $\lambda = 1$, при этом

* Отметим, что система $\{a_l^1[K_2]\}_{l \in R_2}$ необязательно состоит из нулевых векторов, однако при любом $l_0 \in R_1$ $(a_l^1[K_2], a_{l_0}^1[K_2]) = 0$, $l \in R_2$. Это обстоятельство позволяет в дальнейшем выявить интересное свойство полученного решения.

$$a_i[K_1|x_i|K_1] + a_i[K_2|x_i|K_2] + \dots + a_i[K_\tau|x_i|K_\tau] = a_i[l], \quad i \in M. \quad (3.4)$$

При заданной системе $\{K_1, K_2, \dots, K_\tau\}$ подобное разложение в рассматриваемом смысле является единственным.

Здесь $a_i[K_l]$ ($l = 1, 2, \dots, \tau$) и $a_i[l]$, $i \in M$ соответствующие элементы системы (1.1).

Доказательство теоремы, с учетом замечания 2.1, нетрудно провести, используя (3.1) и (3.2).

4. Об ошибках округления в обобщенном методе исключения. Пусть $N = M$ и ранг системы (1.1) равен n . Допустим, что исходные элементы (1.1) заданы с точностью до t десятичных знаков. Используя метод обратного анализа из (3) и рассуждения, приведенные в (4), можно показать, что при решении системы (1.1) процедурой 2, после τ итераций матрица ошибок будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_\tau \end{array} \left\{ \begin{array}{cccc} \overbrace{0 \dots 0}^{K_1} & \overbrace{0 \dots 0}^{K_2} & \dots & \overbrace{0 \dots 0}^{K_\tau} \\ 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & \dots & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & \dots & 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & \dots & 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & 2 \dots 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & 2 \dots 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & \tau - 1 \dots \tau - 1 \\ 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & \tau \dots \tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 \dots 1 & 2 \dots 2 & \dots & \tau \dots \tau \end{array} \right\} = \frac{1}{2} 10^{-t} \quad (4.1)$$

Если $K_1, K_2, \dots, K_\tau$ выбрать одноэлементными, то матрица ошибок (4.1) совпадает с матрицей ошибок, полученной в (3) для метода исключения. Если же на первой итерации взять $K_1 = N$, то матрица (4.1) совпадает с матрицей ошибок, полученной в (4) для метода ортогонализации.

Таким образом с учетом рекомендации в (3) по организации вычислительного процесса можно заключить, что для любого $K = \{K_1, K_2, \dots, K_\tau\}$ процедура 2 по точности вычислений в принципе „лучше“ метода исключения и „хуже“ метода ортогонализации, а в смысле скорости сходимости „медленнее“ метода исключения, но „быстрее“ метода ортогонализации. Отсюда следует, что в принципе можно поставить задачу определения такого $K = \{K_1, K_2, \dots, K_\tau\}$, при котором заданная система линейных уравнений будет решена с требуемой точностью и скоростью.

5. Заключение. С учетом (1.3), следствия 1.1, когда $M_0 \subseteq M$ не одноэлементное множество, можно предложить процедуры, которые являются модификацией процедур, рассмотренных здесь.

Как известно, понятие и процесс ортогонализации играют большую роль при рассмотрении и решении различных задач, поэтому естественно возникает вопрос о возможности применения введенного здесь понятия и процесса частичной ортогонализации к этим задачам, в смысле обобщения. В частности, с учетом процедуры 3, можно поставить задачу обобщения известных конечных методов решения задач линейного программирования ^(1,6,7), основанных на идее особого правила выбора не одного элемента, а нескольких элементов направляющего вектора.

Научно-производственное объединение
ММП Армянской ССР

Ա. Դ. ՔՈՒՆԻՆՎ

Բացառման և լրիվ բացառման մեթոդների ընդհանրացում

Աշխատանքում առաջարկվում են գծային հանրահաչվական հավասարումների սիստեմների լուծման մի քանի մեթոդներ, որոնք հիմնված են ոչ թե մեկ ուղղորդի, էլեմենտի ընտրության վրա, ինչպես արվում է, օրինակ, Գաուսի բացառման մեթոդում, այլ միաժամանակ մի քանի ուղղորդիչ էլեմենտների՝ ուղղորդիչ վեկտորի ընտրության վրա:

Դիտարկվում են բացառման ընդհանրացված մեթոդում կլորացման սրժալների հարցերը, և պահանջվող ճշտությամբ ու արագությամբ գծային հանրահաչվական հավասարումների սիստեմների լուծման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. В. Романовский, Алгоритмы решения экстремальных задач, «Наука», М., 1977. ² Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, в сб. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1963. ³ J. H. Wilkinson, Discuss., 1960 44—53. ⁴ И. И. Москвитина, Доклады на научных конференциях, т. I, вып. 3, Ярославль (1962). ⁵ В. В. Воеводин, в сб. Вычислительные основы линейной алгебры, «Наука», М., 1977. ⁶ Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, Линейное программирование, Физматгиз, М., 1963. ⁷ С. Гусс, Линейное программирование (методы и приложения), Физматгиз, М., 1961.