ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 3

УДК 51 01:518.5

МАТЕМАТИКА

О. С. Асатрян

О позитивных эквивалентностях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 17/IV 1980)

В статье доказывается, что всякая позитивная предполная эквивалентность n-универсальна. Т. е. всякая предполная эквивалентность является фактором любой позитивной предполной эквивалентности. Замечено также, что в классе всех позитивных эквивалентностей понятия m-универсальности и предполноты (креативности) не совпадают. Но тем не менее m-универсальность влечет 1-универсальность. И как следствие построен рекурсивный мономорфизм эквивалентности η_k Трофимова ([1]) в себя.

Обозначения: N—натуральный ряд; $\{\varphi_x\}_{x\in N}$—нумерация всех частично рекурсивных функций (ч. р. ф.); F—множество всех общерекурсивных функций (о. р. ф); F_1—множество всех 1—1 функций из F; $W_x=\delta\varphi_x$—область определения φ_x; $\pi_x=\rho\varphi_x$—область значений φ_x; $k(x)$—универсальная в $\{\varphi_x\}_{x\in N}$ функция; $\Pi=\{\rho\varphi_x\}_{x\in N}$; P—класс всех позитивных эквивалентностей ([2]); $P^p=\{\eta/\eta\in P\ \&\ \eta$—предполная$\}$ ([1,3]). Если для η_0, η_1 из P выполнено условие: $\langle x, y\rangle\in\eta_0\leftrightarrow\langle f(x), f(y)\rangle\in\eta_1$ для некоторой $f\in F$, ($\langle x, y\rangle$—постовская нумерация пар), то будем говорить, что η_0 m-сводится к η_1, и обозначать это так: $\eta_0\leqslant_m\eta_1$; $[x]_\eta$—класс η, содержащий x; $[x, y]$—нумерация пар Клини. Для $\eta\in P$ определим нумерованное множество γ_η следующим образом: $\forall x(\nu(x)=[x]_\eta)$ ([2]). Если $\eta_0\in P$ тривиальная, т. е. $\forall x([x]_{\eta_0}=x)$, то γ_{η_0} будем обозначать через γ_N. Известные из монографий ([1,2,4]) элементарные понятия вводятся без определений.

Лемма 1. *Для любой позитивной эквивалентности η γ_η с тождественным вложением в* П *есть тп-подобъект* П.

Доказательство. Пусть $\gamma=(S, \nu)$ подобъект П такой, что $S\subseteq\{[x]_\eta\}_{x\in N}$, и пусть $h\in F$ такая, что $\iota\nu(x)=\pi_{h(x)}$.
Определим $g\in F$ так: $g(x)=$(первый элемент в перечислении $\pi_{h(x)}$).

Так как $\forall x(\pi_{h(x)}\neq\varnothing)$, то $g\in F$ и $\forall x(\iota\nu(x)=[g(x)]_\eta)$, а это означает, что (γ_η, ι)—главный подобъект П. Номер функции g эффективно зависит от номера функции h [1], поэтому γ_η — n-подобъект П.

Замечание 1. Для каждой предполной эквивалентности η существует о. р. ф. f такая, что

$$\forall x(\varphi_{f(x)}\in F)\&(y\in\delta\varphi_x\to[\varphi_{f(x)}(y)]_\eta=[\varphi_x(y)]_\eta).$$

Для удобства будем говорить, что $\varphi_{f(x)}$ расширяет φ_x в η.

Теорема 1. $\eta\in P^p\leftrightarrow\{[x]_\eta\}_{x\in N}$ n-подмножество П.

Доказательство. $\to$. Пусть $h\in F$ такая, что $\forall x((\pi_x\neq\varnothing\to\varphi_{h(x)}\in F)\&(\pi_x=\pi_{h(x)})\&(\pi_x=\varnothing\to$ $\varphi_{h(x)}$ — нигде не определенная функция)) [1].

Рассмотрим ч. р. ф. $k(h(x),y)$, и пусть $f\in F$ из замечания 1 для η. Рассмотрим $\varphi_{fh(x)}$. Ясно, что $\varphi_{fh(x)}\in F$ для всех $x\in N$.

Определим $\xi(x)\in F$ следующим образом:

$$\pi_{\xi(x)}=[\varphi_{fh(x)}(0)]_\eta.$$

Проверим теперь, что $\forall x(\exists y([y]_\eta=\pi_x)\to\pi_{\xi(x)}=\pi_x)$.

Действительно: $\exists y(\pi_x=[y]_\eta)\to\pi_x\neq\varnothing\&\rho\varphi_x=\rho\varphi_{h(x)}=[\varphi_{fh(x)}(0)]_\eta=$
$=\pi_{\xi(x)}$.

Достаточность очевидна.

Пусть $k(x)$ — одноместная универсальная функция. Можно построить о. р. ф. $a(x)$ такую, что для любой ч. р. ф. φ_x $\varphi_{a(x)}\varphi_x(z)=$ $=k\varphi_{a(x)}(z)$ и $\varphi_{a(x)}$ — о. р. ф.

Теорема 2. *Произвольное позитивное предполное нумерованное множество n-универсально* (см. [2], стр. 15).

Доказательство. Пусть γ — позитивное предполное нумерованное множество и η — нумерационная эквивалентность γ. Для простоты предположим, что $\nu(x)=[x]_\eta$.

Как известно, для каждого $x\in N$ $[x]_\eta$ креативное множество ([2], замечание к лемме 11 § 3)).

С другой стороны, существует о. р. ф. g такая, что

$$\forall x([x]_\eta=W_{g(x)}). \tag{1}$$

Пусть $a\in N$ — фиксированное число, $[a]_\eta$ — фиксированный класс; ψ — функция продуктивности продуктивного множества $N\setminus[a]_\eta$ и $b\in N\setminus[a]_\eta$. Определим о. р. ф. f следующим образом:

$$f(0)=a;$$

$$f(1)=b,$$

предположим, что $f(0),\ldots,f(n)$ определены. Для определения $f_{(n+1)}$ построим р. п. множество

$$R^n=\bigcup_{1\leq l\leq n}[f(l)]_\eta=\bigcup_{1\leq l\leq n}W_{gf(l)}=W_{\xi(n)};$$

положим $f(n+1)=\psi(\xi(n))$. Легко убедиться, что $\xi(n)$ — о. р. ф. и $\forall n\in N(\psi(\xi(n))$ определена).

Тогда $f(n)$ о. р. ф. и обладает следующим очевидным свойством: $\forall x, y(x \neq y \rightarrow [f(x)]_\gamma \neq [f(y)]_\gamma)$. Поэтому γ_N вкладывается в γ_ξ как подобъект.

Покажем, что $(\gamma_N, [f(x)]_\xi)$ wn-подобъект γ_ξ. Действительно, множество $R = \{\langle x, y\rangle / x \in [f(y)]_\xi\}$ рекурсивно перечислимо и является графиком некоторой ч. р. ф. h такой, что

$$\delta h = \bigcup_{y \in N} [f(y)]_\xi = \bigcup_{y \in N} W_{\xi f(y)} \text{ и } \forall x \in \delta h(x)([fh(x)]_\xi = [x]_\xi).$$

Это и означает, что $(\gamma_N, [f(x)]_\xi)$ wn-подобъект γ_ξ. Пусть g — ч. р. ф. Через η_g обозначим эквивалентность, полученную так: $\langle x, y\rangle \in \eta_g \Leftrightarrow \exists n \exists m [g^n(x) = g^m(y)]$, где $g^0(x) = x$, $g^1(x) = g(x)$, $g^2(x) = gg(x), \ldots$ ([2]).

Легко проверить, что $\eta_g \in P$.

Теорема 3. *В классе P существует 1-универсальная не предполная эквивалентность.*

Доказательство. Построим ч. р. ф. $\zeta(x)$:

$$\zeta(x) = [[x]_{2,1}, \varphi_{[x]_{2,1}}([x]_{2,2})].$$

Покажем, что η_ζ m-универсальная в P. Пусть $\eta \in P$. Известно ([2]), что $\eta = \eta_g$, для некоторой ч. р. ф. $g = \varphi_u$. Далее:

$\langle x, y\rangle \in \eta_{\varphi_u} \Leftrightarrow \exists n \exists m(\varphi_u^n(x) = \varphi_u^m(y)) \Leftrightarrow \exists n \exists m([u, \varphi_u^n(x)] = [u, \varphi_u^m(y)])$ (в силу свойства однозначности нумерации пар) $\Leftrightarrow \exists n \exists m(\zeta^n([u, x]) = \zeta^m([u, y]))$ (по построению ζ) $\Leftrightarrow \exists n \exists m(\zeta^n(f(x)) = \zeta^m(f(y)))$ $(f(x) = \lambda x[u, x]) \Leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle \in \eta_\zeta$.

Покажем теперь, что эквивалентность η_ζ не предполная. Для этого проверим следующие импликации:

$$\langle x, y\rangle \in \eta_\zeta \Leftrightarrow \exists n \exists m(\zeta^n(x) = \zeta^m(y)) \Leftrightarrow \exists n \exists m([[x]_{2,1}, \varphi^n_{[x]_{2,1}}([x]_{2,2})] =$$

$$= [[y]_{2,1}, \varphi^m_{[y]_{2,1}}([y]_{2,2})]) \Leftrightarrow [x]_{2,1} = [y]_{2,1} \& \exists n, m(\varphi^n_{[x]_{2,1}}([x]_{2,2}) = \varphi^m_{[y]_{2,1}}([y]_{2,2})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x]_{2,1} = [y]_{2,1} \& \langle [x]_{2,2}, [y]_{2,2}\rangle \in \eta_{\varphi_{[x]_{2,1}}} = \eta_{\varphi_{[y]_{2,1}}}.$$

Пусть теперь φ_n нигде не определенная функция и η_{φ_n} — ее эквивалентность.

Ясно, что $\langle x, y\rangle \in \eta_{\varphi_n} \Leftrightarrow x = y$, функция $f(x) = \lambda x[n, x]$ 1-сводит η_{φ_n} к η_ζ, и $\forall x \in N([f(x)]_{\eta_\zeta} = f(x))$.

Таким образом, мы увидели, что η_ζ имеет рекурсивный класс. Поэтому эквивалентность η_ζ не предполная.

Теорема доказана.

Известно, что для универсальной функции k η_k — предполная и 1-универсальная в классе P.

Теорема показывает, что 1-универсальность и предполнота в P не совпадают.

Несмотря на это, остается справедливым следующее замечание: $\eta_0 \in P$ *m-универсальная $\Rightarrow$ η_0 1-универсальная.*

Действительно, для универсальной функции k выполнено условие: $\eta_k \leqslant^f_m \eta_{k0}$ $(f\in F)$. С другой стороны, для всех $x\in N$ $[f(x)]_{\eta_0}$—бесконечен, так как, в противном случае, $f^{-1}([f(x)]_{\eta_0})$ рекурсивен для некоторого x, чего не может быть для η_k [1]. В силу позитивности η_0 f можно выбрать из F_1. Кроме того, η_k 1-универсальна в P ([2]). Поэтому для произвольного $\eta_i\in P$ существует $g\in F_1$ такая, что $\eta_i \leqslant^g_1 \eta_k$. Тогда $h=fg$ 1-сводит η_i к η_{k0}.

Следствие. *Существует n-подмножество* П, $S=\{\pi_{g(x)}\}_{x\in N}$ *такое, что* $\forall x\forall y(\pi_{g(x)}\cap\pi_{g(y)}\neq\varnothing\Rightarrow\pi_{g(x)}=\pi_{g(y)})$ *и* $N\setminus\bigcup\limits_{x}\pi_{g(x)}$ *не пусто.*

Доказательство. Пусть $\eta_k\in P$ из теоремы 3 и $\eta_i\in P^p$. Тогда имеют место следующие соотношения для некоторых h, $f\in F_1$:

$$\eta_i\leqslant^h_1\eta_i\leqslant^f_1\eta_k.$$

Заметим, что $\bigcup\limits_{x}[f(x)]_{\eta_k}\neq N$, так как в противном случае η_i и η_k изоморфны. Обозначим $q=fh$ и покажем, что семейство

$$S=\{[q(x)]_{\eta_k}\}_{x\in N}=\{\pi_{g(x)}\}_{x\in N}$$

удовлетворяет требованиям следствия (здесь $g\in F$ и легко находится).

Во-первых, очевидно, что $\bigcup\limits_{x}\pi_{g(x)}\subseteq\bigcup\limits_{x}[f(x)]_{\eta_k}$ и поэтому $N\setminus\bigcup\limits_{x}\pi_{g(x)}\neq\varnothing$. q—сводящая функция для η и η_k, поэтому для всех x, $y\in N$

$$\pi_{g(x)}\cap\pi_{g(y)}\neq\varnothing\Rightarrow\pi_{g(x)}=\pi_{g(y)}.$$

Наконец, покажем, что S есть n-подмножество П. В силу предполноты η_i $(\gamma_{\eta_i}, [q(x)]_{\eta_k})$ есть n-подобъект γ_{η_k}, так как легко построить о. р. ф. h' такую, что для всех $y\in N$ $h'(y)\in\bigcup\limits_{x}\pi_{g(x)}$ и $[y]_{\eta_k}\in S\Rightarrow[h'(y)]_{\eta_k}=[y]_{\eta_k}$. С другой стороны, по теореме 1 (γ_{η_k}, i) есть n-подобъект П с тождественным вложением. Отсюда следует, что S есть n-подмножество П. *(В частности, если* $\eta=\eta_k$, *мы получаем, что* γ_{η_k} *изоморфно вкладывается в себя).* Следствие доказано.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Հ. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Պոզիտիվ էկվիվալենտությունների մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում են պոզիտիվ էկվիվալենտությունների որոշ հատկություններ։ Մասնավորապես ապացուցվում է, որ բոլոր պոզիտիվ էկվիվալենտությունների դասում կա 1—ունիվերսալ, բայց ոչ նախալրիվ էկվիվալենտություն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. Л. Ершов*, Теория нумераций, т. 1, Новосибирск, 1971. [2] *Ю. Л. Ершов*, Теория нумераций, т. 2, Новосибирск, 1974. [3] *А. И. Мальцев*, Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», М., 1965. [4] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир», М., 1972.