ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 3

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян

Предельные теоремы для времени ожидания в одноканальных приоритетных системах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 16.IV.1980)

1°. За последние годы заметно возрос интерес исследователей к разделу предельных теорем теории приоритетных систем. Последнее вызвано тем, что с усложнением структуры приоритетных систем затрудняется точный анализ важнейших характеристик: времени ожидания, периода занятости и т. д. Поэтому большое внимание уделяется построению приближений для таких характеристик, например, диффузионных, степень применимости которых проверяется с помощью предельных теорем.

В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1, \ldots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для l-вызовов имеют функцию распределения $B_l(t)$, $B_l(+0) = 0$.

Рассматриваются дисциплины относительного (схема A) и абсолютного (схемы B : B1—дообслуживание прерванного вызова; B2—потеря; B3—обслуживание заново) приоритета, описанные в [1]. Чем меньше индекс вызова, тем выше его приоритет.

Внутри каждого приоритетного потока приняты дисциплины *FIFO* (первым пришел—первым обслужен) и *LIFO* (последним пришел—первым обслужен).

Обозначим через $w_k^i(t)$ виртуальное время ожидания k-вызова в момент t в схемах A и B. Индекс i указывает на дисциплину, принятую внутри каждого приоритетного потока: $i = 1$ – *FIFO*, $i = 2$ – *LIFO*.

Пусть ρ_{k1} — загрузка системы 1-вызовами, ..., k-вызовами. Значения ρ_{k1}, а также констант ρ_{k2}, имеющих смысл второго момента сум-

марного времени, затрачиваемого на обслуживание поступающих за единицу времени 1-вызовов, ..., k-вызовов, приведены в ([3]).

В схемах A и B условие $\rho_{\Sigma 1}<1$ есть необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения для $w_k^1(t)$, а условие $\rho_{\Sigma 1}\leqslant 1$ — для $w_k^2(t)$.

Пусть w_k^i представляет собой стационарное время ожидания k-вызова: $w_k^i = \lim w_k^i(t)$.

Первая задача настоящей работы заключается в получении всех возможных предельных распределений для w_k^i в условиях критической загрузки $\rho_{\Sigma 1} \uparrow 1$ при следующих предположениях.

1. Функции распределения $B_i(t)$ фиксированы ($i=\overline{1,k}$) и для

$$\tilde{B}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dB_i(t) \qquad (\mathrm{Re}\ s\geqslant 0)$$

при $s^+ \to 0$ ($\mathrm{Re}\, s\geqslant 0,\ s\to 0$) в схемах A и $B1$ справедливо представление

$$\tilde{B}_i(s) = 1-\beta_{i1}s + \alpha_i^{(\gamma)}\, s^{\gamma(i)}\,(1+o_s(1)) \qquad (1<\gamma_{(i)}\leqslant 2)$$

с некоторой константой $\alpha_i^{(\gamma)}$. Здесь

$$\beta_{ij} = \int_0^{\infty} t^j\, d\, B_i(t).$$

В схемах $B2$ и $B3$ представление предполагаем выполненным лишь для первого потока.

Положим ($i=\overline{1,k}$)

$$\gamma_i = \min\,(\gamma_{(1)},\ldots,\gamma_{(i)}),\ B_i = \sum_{(j:\gamma_{(j)}=\gamma_i)} a_j \gamma_j^{(\beta)},\ B = a_1\, a_1^{(\gamma)}.$$

Чтобы записать результаты в единой форме для всех схем, в схемах $B2$, $B3$ введены обозначения ($i=\overline{1,k}$)

$$\gamma_i = \gamma_i,\ B_i = \begin{cases} B, \text{ если } \gamma_1<2, \\ 2\rho_{\Sigma 2}, \text{ если } \gamma_1=2. \end{cases}$$

2. Пусть при $\rho_{\Sigma 1}\uparrow 1$ p — номер первого из потоков, для которого $\rho_{p1}\uparrow 1$ и существуют пределы ($i=\overline{1,k}$)

$$\bar{c}_i = \lim_{\rho_{\Sigma 1}\uparrow 1} c_i \qquad \left(c_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}},\quad \rho_i = 1-\rho_{i1},\ \rho_0 = 1\right).$$

Тогда существуют пределы ($i=\overline{1,k}$)

$$\bar{\rho}_{i2} = \lim_{\rho_{\Sigma 1}\uparrow 1} \rho_{i2}.$$

Без ограничения общности можно зафиксировать $a_1, \ldots, a_{p-1}$, положив их равными своим предельным при $\rho_{k1} \uparrow 1$ значениям.

Положим:

$$\gamma_p = \frac{\gamma_p}{\gamma_{p-1}},$$

$$\bar{B}_p = \begin{cases} 2\bar{\rho}_{p2}, \text{ если } \gamma_p = 2, \\ B_{p-1} + \dfrac{\bar{\rho}_{p-1}}{\rho_{p1}} a_p^{(1)} \chi(\gamma_{(p)} - \gamma_{(p-1)}), \text{ если } \gamma_p = \gamma_{p-1} < 2, \\ \dfrac{\bar{\rho}_{p-1}}{\rho_{p1}} a_p^{(1)}, \text{ если } \gamma_p \neq \gamma_{p-1}, \gamma_{p-1} < 2, \gamma_p < 2. \end{cases}$$

Здесь $\chi(x)$ есть 1 при $x \geqslant 0$ и есть 0 при $x < 0$.

2°. Теорема 1. *При выполнении условий 1, 2 существует предел*

а) $\bar{c}_k = 0$

$$\lim_{\rho_{k1} \uparrow 1} P\left\{\frac{\rho_{k-1} \rho_{kp}^{\lambda_p - 1}}{\bar{B}_p^{\lambda_p - 1}} w_k^1 < x\right\} = R(x) \ (x \geqslant 0),$$

где

$$R(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, \text{ если } \gamma_p = 2, \\ \int_0^x G_{\gamma_p - 1}(x t^{\gamma_p - 1}) \, d(1 - e^{-t}), \text{ если } 1 < \gamma_p < 2. \end{cases}$$

Здесь $G_\alpha(x)$ $(0 < \alpha < 1)$ есть положительный устойчивый закон с показателем α.

б) $\bar{c}_k > 0$

$$\lim_{\rho_{k1} \uparrow 1} P\left\{\frac{\rho_{kp}^{\lambda_p}}{\bar{B}_p^{\lambda_p - 1}} w_k^1 < x\right\} = R_{\bar{\gamma}_p}(x), \quad (x \geqslant 0),$$

где $(0 < a)$

$$\Gamma_a(x) = \int_0^\infty e^{-sx} \, d R_a(x) = \frac{a}{s + \Delta^{\gamma_p - 1}(s)}, \tag{1}$$

а $\Delta(s)$ есть решение уравнения

$$z + z^{\gamma_p} = s, \tag{2}$$

удовлетворяющее условию $\Delta(0) = 0$.

В частном случае $\gamma_p = 2$ возможно обращение (1)

$$R_a(x) = -a\int_0^x e^{-\frac{a}{4}}\left\{\int_0^\infty e^{-(a-\frac{1}{2})v}\ \psi(t, u)\,dt\right\}du,$$

где

$$\psi(u, v) = \frac{u}{2v\sqrt{\pi v}}\exp\left\{-\frac{u^2}{4v}\right\} \tag{3}$$

Замечание 1. В работе ([3]) был поставлен следующий вопрос. В схемах A и B в предположении конечности первых двух моментов у функций распределения $B_l(t)$ $(l = \overline{1, k})$ только ли экспоненциальное распределение может служить в качестве предельного для w_k^1 в условиях критической загрузки?

Как показывает теорема 1, при $\bar{c}_k > 0$ в указанных выше условиях предельные распределения для w_k^1 не являются экспоненциальными.

Теорема 2. *При выполнении условий* 1, 2 *в предположении* $\bar{c}_k > 0$ *существует предел*

$$\lim_{\rho_{k1}\uparrow 1} P\left\{\frac{p_k^{\lambda p}}{\bar{B}_p^{\lambda p}-1}\ w_k^2 < x\right\} = R_{\bar{c}_k-1}(x)\quad (x \geqslant 0),$$

где функция $R_a(x)$ $(0 < a)$ *задается в теореме 1.*

Замечание 2. Интересно отметить следующее. В теореме 2 предполагается, что $\bar{c}_k > 0$ при $\rho_{k1} \uparrow 1$. Случай $\bar{c}_k = 0$ не дает возможности для получения предельной теоремы.

Дело в том, что вклад 1-вызовов, ..., $(k-1)$-вызовов, поступающих после начала отсчета w_k^1, в нормированное w_k^1 при $\rho_{k1} \uparrow 1$ „несуществен". В то же время w_k^1 не превосходит той же величины при $\rho_{k1} = 1$, которая при фиксированных загрузках является величиной собственной. Аналогичное же влияние первых $k-1$ потоков на w_k^1 при $\bar{c}_k > 0$ существенно, что и приводит при $\rho_{k1} \uparrow 1$ к неограниченному увеличению w_k^1.

Наличие условий критической загрузки для $(k-1)$-го потока позволяет надеяться на „существенный" вклад w_{k-1}^2 в w_k^1 при $\rho_{k1} = 1$ и $\rho_{k-11} \uparrow 1$.

Теорема 3. *При выполнении условия* 1 *и с заменой* k *на* $k-1$ *условия* 2 *при* $\rho_{k1} = 1$, $\rho_{k-11} \uparrow 1$ *существует предел*

$$\lim P\left\{\frac{p_{k-1}^{\lambda p}}{\bar{B}_p^{\lambda p-1}}\ w_k^2 < x\right\} = M(x)\quad (x \geqslant 0),$$

где

$$m(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,d\,M(x) = \frac{\Delta(s + s^{1/\tau_p})}{s + s^{1/\tau_p}}, \tag{4}$$

а $\Delta(s)$ *есть решение уравнения* (2) *с* $\Delta((1)) = 0$.

В частном случае $\gamma_p = 2$ *возможно обращение* (4)

$$M(x) = -\int_0^x \left\{ \int_0^\infty \int_0^v \psi(t, u)\psi(u, v-u)e^{-\left(\frac{t}{3}+\frac{u}{4}\right)} du dt \right\} dv,$$

где $\psi(u, v)$ *задается формулой* (3).

3°. Вторая задача заключается в получении предельных теорем для $w_k^1(t)$ при фиксированных загрузках, когда $t \to +\infty$. Будут изучены наиболее интересные случаи—случаи „околокритических" загрузок:

1) $\rho_{k1} = 1$; 2) $\rho_{k-11} = 1$; 3) $\rho_{k-11} < 1$, $\rho_{k1} > 1$.

Теорема 4. *Если загрузки фиксированы,* $\rho_{k1} = 1$ *и выполнено* 1, *то при* $t \to +\infty$ *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{ \frac{\rho_{k-1}\, w_k^1(t)}{(2\,B_k t)^{1/\gamma_k}} < x \right\} = \bar{G}_{\gamma_k}(x) \quad (x \geqslant 0).$$

где

$$\bar{g}_{\gamma_k}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\bar{G}_{\gamma_k}(x) = e^{s^{\gamma_k/(\gamma_k-2)}} \left\{ 1 - \frac{s}{2^{1/\gamma_k}\,\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^1 e^{-(s^{\gamma_k/2})v^{\gamma_k}-(1-\gamma_k^{-1})} dv \right\}.$$

Следствие 1. Если в условиях теоремы 4 $\gamma_k = 2$, то

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{ \frac{\rho_{k-1}\, w_k^1(t)}{\sqrt{4\,\rho_{k2}\cdot t}} < x \right\} = 2\,\Phi(x) - 1 \quad (x \geqslant 0),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (-\infty < x \leqslant +\infty)$$

Теорема 5. *Если загрузки фиксированы,* $\rho_{k-11} = 1$ *и выполнено* 1, *то при* $t \to +\infty$ *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{ \frac{2\,B_{k-1} w_k^1(t)}{(-\rho_k \cdot t)^{\gamma_k - 1}} < x \right\} = G^{(1/\gamma_k - 1)}(x) \quad (x > 0),$$

где

$$g^{(1/\gamma_k - 1)}(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\,G^{(1/\gamma_k - 1)}(x) = \exp\left\{-(2s)^{1/(\gamma_k - 1)}\right\}.$$

Следствие 2. Если в условиях теоремы 5 $\gamma_k = 2$, то

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{ \frac{4\,\rho_{k-12}}{\rho_k^2\, t^2}\, w_k^1(t) > x \right\} = 2\{1 - \Phi(x^{-1/2})\} \quad (x > 0).$$

Теорема 6. *Если загрузки фиксированы,* $\rho_{k-11} < 1$, $\rho_{k1} > 1$ *и выполнено* 1, *то при* $t \to +\infty$ *существует предел*

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\tau_k^{-1}\left[w_k^1(t)+\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}}\right]<x\right\}=G_{\gamma_k}(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

где (s—действительное число)

$$\tau_k=\frac{|2\Gamma(\rho_{k-1}B_k-\rho_kB_{k-1}\chi(\gamma_k=\gamma_{k-1})|^{1/\gamma_k}}{\rho_{k-1}^{1+\gamma_k^{-1}}},$$

$$g_{\gamma_k}(s)=\int_0^\infty e^{isx}\,dG_{\gamma_k}(x)=\exp\left\{\frac{(-is)^{\gamma_k}}{2}\right\},$$

а i—мнимая единица.

Следствие 3. Если в условиях теоремы 6 $\gamma_k=2$, то

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\tau_k^{-1}\left[w_k^1(t)+t\,\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}}\right]<x\right\}=\Phi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\tau_k=2\sqrt{\frac{\rho_{k2}\,\rho_{k-1}-\rho_{k-12}\rho_k}{\rho_{k-1}^3}}\,t.$$

Замечание 3. При $\rho_{k1}=1$ для $w_k^1(t)$ существует при $t\to+\infty$ невырожденное стационарное распределение. Поэтому попытка получения аналога теоремы 4 для $w_k^1(t)$ бессмысленна.

Открытым остается вопрос получения аналогов предельных теорем 5 и 6 для $w_k(t)$.

Ереванский государственный
университет

է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

Ասիմպտոտային թեորեմներ սպասման ժամանակի համար միալար նախապատվությամբ համակարգերում

Դիտարկվում է $M/G/1/\infty$ տիպի համակարգ հարաբերական և բացարձակ նախապատվությամբ դիսցիպլինաների դեպքում։ Նույն հոսքի պահանջները սպասարկվում են համաձայն «առաջինը եկավ—առաջինը սպասարկվեց», կամ «վերջինը եկավ—առաջինը սպասարկեց» դիսցիպլինաների։

k—րդ ($k=\overline{1,r}$) հոսքի պահանջի հնարավոր սպասման ժամանակի բաշխման համար t պահին ապացուցված են ասիմպտոտային թեորեմներ, երբ $t\to\infty$։

ա) $\rho_{k-11}<1$, $\rho_{k1}>1$ բ) $\rho_{k-11}=1$, գ) $\rho_{k1}=1$

ֆիքսած ծանրաբեռնվածությունների դեպքում։ Ակտանգ ρ_{k1} ($k=\overline{1,r}$) համակարգի ծանրաբեռնվածությունն է առաջին k հոսքերի կողմից։

Ձևակերպված են նաև թեորեմներ k—րդ հոսքի ($k=\overline{1,r}$) պահանջի առաջիններ սպասման ժամանակի բաշխման համար կրիտիկական ($\rho_{k1}=1$) և միտավոր ($\rho_{k-11}=1$, $\rho_{k1}=1$) ծանրաբեռնվածությունների դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. В. Гнеденко* и др., Приоритетные системы обслуживания, Изд-во МГУ, М., 1973 [2] *Э. А. Даниелян*, «Изв. АН АрмССР», Математика, т. 10 № 3 (1975) [3] *Т. А. Азлиров, Я. М. Хусаинов*, «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, № 6, 1974