

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

И. Г. Хачатрян

**О единственности восстановления дифференциального оператора с
 аналитическими коэффициентами по его спектральной
 матрице-функции**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 15/V 1980 г.)

В статье рассматривается действующий в пространстве $L^2(0, \infty)$ оператор L , порожденный дифференциальным выражением порядка $2n > 2$

$$I(y) = (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [p_{n-1-k}(x) y^{(k)}]^{(k)}, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

и краевыми условиями $y^{(\nu)}(0) = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$), где коэффициенты $p_k(x)$ вещественнозначны и удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 x^{k+1} |p_k(x)| dx < \infty, \quad \int_1^\infty |p_k(x)| dx < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Получены результаты, относящиеся к спектральным свойствам оператора L , которые при иных предположениях доказаны в монографии (1). С их помощью при дополнительных ограничениях на коэффициенты $p_k(x)$ доказана теорема о единственности восстановления оператора L по его спектральной матрице-функции.

Теорема 1. Оператор L является самосопряженным. Непрерывная часть спектра S_L оператора L заполняет всю положительную полуось, а на отрицательной полуоси могут находиться лишь собственные значения оператора L . Множество собственных значений ограничено и может иметь точкой сгущения только нуль. Кратность положительных собственных значений не превосходит $n-1$, а кратность неположительных собственных значений не превосходит n .

Лемма 1. При всех значениях параметра μ уравнение $I(u) =$

при μ имеет решения $u_k(x, \mu)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), удовлетворяющие начальным условиям

$$u_k^{(\nu)}(0, \mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = 2n-1-k, \\ 0 & \text{при } \nu \neq 2n-1-k, \end{cases} \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

где через $f^{(\nu)}(x)$ обозначена квазипроизводная порядка ν функции $f(x)$. Решения $u_k(x, \mu)$ являются целыми функциями параметра μ и вещественнозначны при вещественных значениях μ .

Теорема 2. Существует единственная (с точностью до некоторой нормировки) вещественная симметрическая неубывающая матрица-функция $\sigma(\mu) = \|\sigma_{kj}(\mu)\|_{k,j=0}^{n-1}$ такая, что формулы

$$\bar{F}_j(\mu) = \int_0^\infty f(x) u_j(x, \mu) dx, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty \sum_{k,j=0}^{n-1} F_j(\mu) u_k(x, \mu) d\sigma_{kj}(\mu) \quad (3)$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения $L^2(0, \infty)$ на L^2_σ и L^2_σ на $L^2(0, \infty)$ соответственно, переводящие друг в друга операторы L и Λ_σ , где Λ_σ — оператор умножения на независимую переменную в L^2_σ . При этом интегралы в формулах (2) и (3) сходятся в смысле метрики в L^2_σ и $L^2(0, \infty)$ соответственно и

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty \sum_{k,j=0}^{n-1} F_k(\mu) \bar{F}_j(\mu) d\sigma_{kj}(\mu).$$

Матрица $\sigma(\mu)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, называется спектральной матрицей-функцией оператора L .

Замечание 1. Впредь будем считать функцию $\sigma(\mu)$ непрерывной слева (если зафиксировать также значение функции $\sigma(\mu)$ в некоторой точке, то при такой нормировке функция $\sigma(\mu)$ будет единственной). Множество собственных значений оператора L совпадает с множеством точек разрыва функции $\sigma(\mu)$, причем кратность любого собственного значения μ_0 совпадает с рангом матрицы $B(\mu_0) = \|B_{kj}(\mu_0)\|_{k,j=0}^{n-1}$, где $B(\mu_0) = \sigma(\mu_0+0) - \sigma(\mu_0)$.

Пусть $E_\mu (-\infty < \mu < \infty)$ — разложение единицы оператора L . Тогда при любых μ, ν ($\mu < \nu$) разность $E_\nu - E_\mu$ есть интегральный оператор с ядром

$$E(x, t; \mu, \nu) = \int_{-\infty}^\infty \sum_{k,j=0}^{n-1} u_k(x, \xi) u_j(t, \xi) d\sigma_{kj}(\xi).$$

Резольвента $(L - \mu I)^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром

$$G(x, t, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_k(x, \zeta) u_j(t, \zeta)}{\zeta - \mu} d\sigma_{kj}(\zeta), \quad \mu \in S_L.$$

Если положить $H(x, t, \mu) = (\mu - \bar{\mu})^{-1} |G(x, t, \mu) - \bar{G}(x, t, \mu)|$, то имеют место также формулы

$$H(x, t, \mu) = \int_0^{\infty} G(x, \xi, \mu) \bar{G}(t, \xi, \mu) d\xi, \quad \mu \in S_L,$$

$$H(x, t, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_k(x, \zeta) u_j(t, \zeta)}{|\zeta - \mu|^2} d\sigma_{kj}(\zeta), \quad \mu \in S_L.$$

Обозначим через $H_{kj}(x, t, \mu)$ ($k, j = 0, 1, \dots, n-1$) квазипроизводные функции $H(x, t, \mu)$ $(2n-1-k)$ -го порядка по x и $(2n-1-j)$ -го порядка по t . Существуют конечные значения $H_{kj}(0, 0, \mu)$, причем

$$H_{kj}(0, 0, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{kj}(\zeta)}{|\zeta - \mu|^2}, \quad \mu \in S_L, \quad k, j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Предположим теперь, что коэффициенты $p_k(x)$ вещественнозначны на полуоси $0 < x < \infty$, аналитически продолжаются в сектор $D = \{z; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\}$ и удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda+\nu+1} \left\{ \sup_{\operatorname{Re} z=x} |p_k(z)| \right\} dx < \infty, \quad k, \nu = 0, \dots, n-1. \quad (5)$$

Как показано в работе автора (²), при условиях (5) уравнение $l(y) = \lambda^{2n} y$ для всех значений параметра λ из полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что функции $y^{(s)}(x, \lambda)$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$) представляются в виде

$$y^{(s)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \left\{ (i\lambda)^s + \sum_{m=0}^{\infty} (i\lambda)^m \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} K_{sm}(x, t) dt \right\},$$

при этом ядра $K_{sm}(x, t)$ ($0 \leq x, t < \infty$) вещественнозначны и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{sm}(x, t)| \leq h_1 \left(x + \frac{t}{2} \right) \exp \left\{ h(x) - h \left(x + \frac{t}{2} \right) \right\},$$

где $h_1(x) \geq 0$ — невозрастающая суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция и

$$h(x) = \int_0^x h_1(t) dt.$$

Функции $y^{(v)}(0, \lambda)$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) регулярны в верхней полуплоскости, непрерывны вплоть до границы и имеют непрерывную производную во всех точках полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$. При $\text{Im } \lambda > 0$ имеет место оценка

$$\frac{1}{8 \text{Im } \lambda} e^{-2a \text{Im } \lambda} \leq \int_0^{\infty} |y(x, \lambda)|^2 dx \leq \frac{1}{2 \text{Im } \lambda} [1 + h(0) e^{h(0)}]^2, \quad (6)$$

где число $a > 0$ такое, что $h(a) e^{h(a)} \leq 1/2$.

Обозначим $\omega_k = \exp(i\pi k/n)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$) и при $\lambda > 0$ введем следующие $n+1$ линейно-независимые решения уравнения $L(y) = -\lambda^{2n} y$: $y_k(x, \lambda) = y(x, \lambda \omega_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Введем также матрицу $A(\lambda) = \|y_k^{(v)}(0, \lambda)\|_{v=0, k=0}^{n, n}$, содержащую n строк и $n+1$ столбец. Обозначим через $\Delta_k(\lambda)$ ($0 \leq k \leq n$) минор n -го порядка матрицы $A(\lambda)$, не содержащий ее $(k+1)$ -ый столбец, а через $\delta_{kv}^{(j)}(\lambda)$ ($0 \leq v \leq n-1$; $0 \leq k < j \leq n$) — минор $(n-1)$ -го порядка, не содержащий ее $(v+1)$ -ую строку, $(k+1)$ -ый и $(j+1)$ -ый столбцы. Определители $\Delta_0(\lambda)$, $\delta_{0n}^{(j)}(\lambda)$ и $\Delta_n(\lambda)$, $\delta_{nn}^{(j)}(\lambda)$ регулярны в секторах $-\pi/n \leq \arg \lambda \leq 0$ и $0 \leq \arg \lambda \leq \pi/n$ соответственно, а определители $\delta_{0n}^{(j)}(\lambda)$ регулярны в секторе $-\pi/n \leq \arg \lambda \leq \pi/n$.

Лемма 2. Пусть $\lambda_0 \neq 0$, $0 \leq \arg \lambda_0 \leq \pi/n$ и $\mu_0 = \lambda_0^{2n}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) число μ_0 является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $\Delta_n(\lambda_0) = 0$, при этом кратность собственного значения μ_0 совпадает с кратностью нуля λ_0 определителя $\Delta_n(\lambda)$;

б) если $\Delta_n(\lambda_0) = 0$, то существуют конечные пределы

$$M_{kv}(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [2n \lambda^{2n-1} (\lambda - \lambda_0) \gamma_{kv}(\lambda)], \quad (7)$$

$$k, v = 0, 1, \dots, n-1,$$

где

$$\gamma_{kv}(\lambda) = (-1)^{k+v+1} \frac{\delta_{kv}^{(n)}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}, \quad k, v = 0, 1, \dots, n-1,$$

причем ранг матрицы $M(\lambda_0) = \|M_{kv}(\lambda_0)\|_{k,v=0}^{n-1}$ совпадает с кратностью собственного значения μ_0 оператора L .

Функции $\gamma_{0v}(\lambda)$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) и

$$S_k(\lambda) = (-1)^{n+k} \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (8)$$

непрерывны на полуоси $\lambda > 0$, при этом

$$\sum_{k=0}^n S_k(\lambda) y_k(x, \lambda) = 2n \lambda^{2n-1} \sum_{v=0}^{n-1} \gamma_{0v}(\lambda) u_v(x, \lambda^{2n}).$$

При $0 < \arg \lambda < \pi/n$ и $\Delta_n(\lambda) \neq 0$ справедливы также формулы

$$G(x, t, \lambda^{2n}) = \sum_{k,j=0}^{n-1} \gamma_{jk}(\lambda) u_k(x, \lambda^{2n}) y_j(t, \lambda), \quad x \leq t,$$

$$H_{kj}(0, 0, \lambda^{2n}) = \sum_{s,l=0}^{n-1} \gamma_{sl}(\lambda) \bar{\gamma}_{kl}(\lambda) \int_0^x y_s(x, \lambda) \bar{y}_l(x, \lambda) dx, \quad (9)$$

$$k, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть число $\mu_0 = \lambda_0^{2n}$ ($\lambda_0 > 0$ или $\arg \lambda_0 = \pi/2n$) является собственным значением кратности m оператора L . Тогда

$$E(x, t; \mu_0, \mu_0 + 0) = \sum_{k,j=0}^{n-1} B_{kj}(\mu_0) u_k(x, \mu_0) u_j(t, \mu_0).$$

Эта функция представляется также в виде

$$E(x, t; \mu_0, \mu_0 + 0) = \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\lambda_0) y_k(x, \lambda_0) \bar{y}_j(t, \lambda_0),$$

где матрица $N(\lambda_0) = [N_{kj}(\lambda_0)]_{k,j=0}^{n-1}$ является эрмитовой неотрицательной матрицей ранга m . Имеют место формулы

$$\sum_{k=0}^{n-1} N_{jk}(\lambda_0) \bar{y}_k(x, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{n-1} M_{jk}(\lambda_0) u_k(x, \mu_0), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Если индексы $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n-1$ такие, что

$$\det \|B_{j_i j_i}(\mu_0)\|_{i=1}^m \neq 0,$$

то справедливы соотношения

$$\begin{vmatrix} N_{j_1 j_1} & \bar{M}_{j_1 j_1} & \dots & \bar{M}_{j_1 j_m} \\ M_{j_2 j_1} & B_{j_2 j_1} & \dots & B_{j_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{j_m j_1} & B_{j_m j_1} & \dots & B_{j_m j_m} \end{vmatrix} = 0, \quad k, v = 0, 1, \dots, n-1, \quad (10)$$

(при $m = 1$ имеет место также формула $N = (Sp B)^{-1} M B M^*$).

Замечание 2. При условиях (5) теорему 1 можно дополнить следующими утверждениями: нуль не является собственным значением оператора L ; число положительных собственных значений кратности $n-1$ и отрицательных собственных значений кратности n конечно; если обозначить через $\{\mu_+^j\}$ и $\{\mu_-^j\}$ последовательности положительных и отрицательных собственных значений соответственно, пронумерованных в порядке убывания модулей, то

$$\sum_j \mu_+^j < \infty, \quad \sum_j |\mu_-^j| < \infty.$$

Если спектральную матрицу-функцию $\phi(\mu)$ представить в виде

$$\sigma(\mu) = \sum_{\mu_j < \mu} B(\mu_j) + \sum_{\mu_1 < \mu} B(\mu_1) + \beta(\mu), \quad -\infty < \mu < \infty,$$

то матрица-функция $\beta(\mu) = [\beta_{kj}(\mu)]_{k,j=0}^{n-1}$ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке и

$$\frac{d}{d\mu} \beta_{kj}(\mu) = \frac{\pi}{\pi} \lambda^{2n-1} \gamma_{0k}(\lambda) \bar{\gamma}_{0j}(\lambda), \quad \mu = \lambda^{2n}, \quad \lambda > 0, \quad (11)$$

$$k, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 3. Коэффициенты $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) дифференциального выражения (1), удовлетворяющие условиям (5), по спектральной матрице-функции $\sigma(\mu)$ оператора L определяются однозначно.

Набросок доказательства. Очевидно, что по матрице $\sigma(\mu)$ однозначно определяются как собственные значения μ_1, μ_2 оператора L , так и матрицы $B(\mu_1), B(\mu_2), \beta'(\mu)$. Используя формулы (11), (9), (4) и оценку (6), можно доказать, что по матрице $\sigma(\mu)$ однозначно определяются также функции $y^{(j)}(0, \nu)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$), а значит и определители $\Delta_k(\nu), \delta_{kn}(\nu)$. Следовательно, в силу (8) и (7) однозначно определяются функции $S_k(\nu)$ и матрицы $M(\nu_1), M(\nu_2)$, где $\nu_1 = \nu^{1/n}$ ($\nu_1 > 0$) и $\nu_2 = \nu^{1/n}$ ($\arg \nu_2 = \pi/2n$). Но тогда из формул (10) однозначно определяются также матрицы $N(\nu_1), N(\nu_2)$. Однако, как показано в статье автора (²), по набору данных

$$\{S_k(\nu)\}_{k=0}^{n-1}, \quad [\nu_1, N(\nu_1)], \quad \{\nu_2, N(\nu_2)\}$$

коэффициенты $p_k(x)$, удовлетворяющие условиям (5), определяются однозначно, что и доказывает теорему.

Замечание 3. При условиях (5) имеют место формулы (^{4,3})

$$u_k(x, \mu) = \varphi_k(x, \mu) + \int_0^x \varphi_k(t, \mu) F_k(x, t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $\varphi_k(x, \mu)$ — решения уравнения $(-1)^n \varphi^{(2n)} = \mu \varphi$, удовлетворяющие таким же начальным условиям, что и функции $u_k(x, \mu)$. Однако при различных значениях k ядра $F_k(x, t)$, вообще говоря, различные. Так будет, например, при $p_k(z) \equiv 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) и $p_{n-1}(z)$, непрерывной вплоть до границы сектора D и $p_{n-1}(0) \neq 0$. Это обстоятельство затрудняет (^{4,1}) перенос на рассматриваемый случай $n > 1$ метода восстановления оператора L по $\sigma(\mu)$, разработанного при $n=1$ И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном (⁶). Отмеченное обстоятельство затрудняет также применение при доказательстве теоремы 3 метода, предложенного В. А. Марченко (⁷) для случая $n=1$.

Սպեկտրալ մատրից-ֆունկցիայով անալիտիկ գործակիցներով դիֆերենցիալ
օպերատորի վերականգնման միակուսյան մասին

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k |p_{n-1-k}(x) y^{(k)}|^{(k)} = \mu y, \quad 0 < x < \infty,$$

$$y^{(v)}(0) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1,$$

որտեղ՝ $p_k(x)$ գործակիցները իրական են $0 < x < \infty$ կիսաառանցքի վրա, անալիտիկ շարունակվում են $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}$ անկյան մեջ և թավաբարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$\int_0^\infty x^{k+v+1} \left| \sup_{\operatorname{Re} z = x} |p_k(z)| \right| dx < \infty, \quad k, v = 0, 1, \dots, n-1:$$

Ցույց է տրվում, որ այդ եզրային խնդրի սպեկտրալ մատրից-ֆունկցիայով $p_k(x)$ գործակիցները որոշվում են միարժեքորեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. А. Ниймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.
² И. Г. Хачатрян, «Известия АН АрмССР», сер. матем., т. 14, № 6 (1979).
³ И. Г. Хачатрян, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980).
⁴ И. Г. Хачатрян, «Известия АН АрмССР», сер. матем., т. 13, № 3 (1978).
⁵ И. Г. Хачатрян, «Известия АН АрмССР», сер. матем., т. 15, № 1 (1980).
⁶ Л. А. Сухович, Матем. сб., т. 55(97), № 3 (1961).
⁷ Л. А. Сахнович, Матем. сб., т. 56(98), № 2 (1962).
⁸ И. М. Гельфонд, Б. М. Левитан, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 15, № 4 (1951).
⁹ В. А. Морченко, ДАН СССР, т. 72, № 3 (1950).