ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 2

УДК 519.218.5+517.926

МАТЕМАТИКА

Р. В. Амбарцумян, Б. С. Нахапетян

Распределение Пальма и предельные теоремы для точечных случайных процессов*

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 19/IV 1980)

Рассмотрим следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -P_0(t)+f_0(t); \\ \frac{dP_k(t)}{dt} &= P_{k-1}(t)-P_k(t)+f_k(t), \quad k=1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P_0(0)=1, \quad P_k(0)=0, \quad k=1, 2, \ldots.$$

Функции $f_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ предполагаются непрерывными.

В случае, когда $f_k(t)=0$, $t\in[0, \infty)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, решением этой системы является семейство функций вида $P_k(t)=e^{-t}\cdot\frac{t^k}{k!}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, т. е. пуассоновское распределение со средним t.

Хорошо известно, что при $t\to\infty$ пуассоновское семейство функций (пуассоновское распределение) асимптотически нормально. Нас интересует следующий вопрос: при каких условиях на свободные члены $f_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ решение системы (1) сохраняет свойство асимптотической нормальности.

Приведем необходимые определения.

Мы скажем, что решение $P_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ системы (1) асимптотически при $t\to\infty$ нормально, если

$$\sum_{k:\frac{k-t}{\sqrt{t}}<a} P_k(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds, \quad a\in R^1. \tag{2}$$

---

* Настоящая заметка является кратким изложением доклада, прочитанного одним из авторов на заседании Отделения физико-математических наук 25 марта 1980 г. в связи с годичной сессией АН АрмССР.

и локально асимптотически при $t\to\infty$ нормально, если

$$\sqrt{t}P_k(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-t)^2}{2t}}\underset{t\to\infty}{\to}0 \qquad (3)$$

равномерно по k, $k=0, 1, 2, \ldots$.

Отметим, что свойство (3) решения системы (1) влечет свойство (2).

Далее будем рассматривать системы вида (1), для которых

$$\|f\|_t=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{k}f_i(t)\right|<\infty.$$

Теорема 1 (Р. В. Амбарцумян). *Пусть семейство функций $f_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ таково, что*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t\|f\|_t\,dt=0.$$

Тогда решение системы (1) *асимптотически при $t\to\infty$ нормально.*

Теорема 2 (Б. С. Нахапетян). *Пусть семейство функций $f_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$* таково, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t t\|f\|_t\,dt=0.$$

Тогда решение системы (1) *локально асимптотически при $t\to\infty$ нормально.*

Применим эти результаты к точечным случайным процессам P на R^1. Точки, принадлежащие реализации точечного процесса, будем называть событиями.

Хорошо известно (см., например ([1])), что для точечных случайных процессов на R^1 имеют место следующие соотношения:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\Pi_0(t),\quad \frac{dP_k(t)}{dt}=\Pi_{k-1}(t)-\Pi_k(t),\quad k=1, 2, \ldots$$

$$P_0(0)=1,\quad P_k(0)=0,\quad k=1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Здесь $P_k(t)=P(N(t)=k)$ — вероятность наступления k событий в промежутке $[0, t)$, $N(t)$ — число событий в промежутке $[0, t)$, а $\Pi_k(t)$ — условная вероятность наступления k событий в промежутке $[0, t)$ при условии, что в точке $t=0$ имеется событие (в смысле распределения Пальма). Отметим, что для пуассоновского процесса $P_k(t)=\Pi_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

Соотношения (4) можно представить в виде (1) при частном выборе функций $f_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, а именно, надо положить

$$f_0(t)=P_0(t)-\Pi_0(t).$$

$$f_k(t) = \Pi_{k-1}(t) - P_{k-1}(t) - \Pi_k(t) + P_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Следствием теорем 1, 2 будут нижеследующие утверждения. Обозначим $\|P\|_t = \sum_{k=0}^{\infty} |P_k(t) - \Pi_k(t)| \to 0.$

Следствие 1. *Пусть случайный точечный процесс P таков, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \|P\|_t \, dt = 0. \tag{6}$$

Тогда распределение случайной величины $N(t)$ асимптотически при $t \to \infty$ нормально.

Следствие 2. *Пусть случайный точечный процесс P таков, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t t \|P\|_t \, dt = 0. \tag{7}$$

Тогда распределение случайной величины $N(t)$ локально асимптотически при $t \to \infty$ нормально.

Следствиям 1, 2 можно дать следующую интерпретацию: достаточно быстрое при $t \to \infty$ забывание условия „в точке $t = 0$ имеется событие" гарантирует асимптотическую нормальность распределения случайной величины $N(t)$.

Теоремы 1, 2 можно применить для получения условий асимптотической нормальности числа событий в шаре большого объема t для однородных точечных процессов в R^n, $n > 1$.

Для этого достаточно в соотношениях (5) подставить вместо $\Pi_k(t)$ условную вероятность для числа событий, попавших в шар объема t, при условии, что на границе шара имеется событие. Как показано в работе [2], для так определенных вероятностей соотношения (4) остаются в силе, откуда и следует возможность применения теорем 1, 2 для точечных процессов в R^n, $n > 1$.

Отметим, что соотношения типа (4) естественным образом возникают в задачах стохастической геометрии, в частности, для точечных процессов пересечений индуцируемых случайным полем отрезков на прямой [3].

Как легко проверить, процессы восстановления с обычными [4] ограничениями на функцию распределения длины интервала между моментами восстановления удовлетворяют условию (6)

Представляет также интерес задача нахождения условий на потенциал взаимодействия, при которых соответствующие точечные гиббсовские случайные поля удовлетворяют условию (6).

В заключение отметим, что совершенно аналогично вышеизложенному можно строить и дискретную теорию.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Պալմի բաշխումը և սահմանային թեորեմներ կետային պատահական պրոցեսների համար

Հոդվածում ուսումնասիրվում են ասիմպտոտիկ նորմալության հարցերը. կետային պատահական պրոցեսի ռեալիզացիայի այն կետերի թվի վրա, որոնք ընկած են որոշ միջակայքում։

Առաջարկվում է նոր մոտեցում, որը օգտագործվում է կետային պատահական պրոցեսի այսպես կոչված Պալմի բաշխումը, այսինքն՝ ռեալիզացիայի որոշ միջակայքում ընկած կետերի (պատահույթների) թվի պայմանական բաշխումը այն պայմանով, որ սկզբնական պահին պատահույթը տեղի է ունեցել։

Ինչպես ցույց է տրված հոդվածում սկզբնական պահին պատահույթը տեղի է ունեցել պայմանի բավականաչափ արագ մոռանալը ապահովում է ասիմպտոտիկ նորմալությունը, ինչպես նաև լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Я. Хинчин*, Работы по математической теории массового обслуживания, Изд-во физ.-мат. лит., М., 1963. [2] *R. V. Ambartzumian*, Palm distributions and superpositions of independent point processes in R^n, Stochastic Point Processes (ed. P. A. Lewis), New-York, 1972. [3] *В. Оганян*, в сб. Комбинаторные принципы в стохастической геометрии, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1980. [4] *Д. Кокс, В. Смит*, Теория восстановления, „Советское радио", М., 1967.