ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. А. Мартиросян

О равномерном приближении многочленами с коэффициентами из заданного множества

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 15/IV 1980)

Пусть $C[a, b]$—банахово пространство вещественных непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$, $A = \{\pm a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_0 = 0$, —строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел.

В 1965 г. А. О. Гельфонд установил ([1]), что если последовательность чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$a_{n+1}-a_n \leq Ca_n^{\gamma},\ n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $0<\gamma<1$, C — постоянная, а для числа α, $0<\alpha<1$, имеем

$$\alpha < \left[\frac{1}{2}\,\alpha(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{\gamma} = \beta^*,$$

то любую функцию из $C[\alpha, \beta]$, где $\alpha<\beta<\beta^*$, можно приблизить равномерно на $[\alpha, \beta]$ многочленами вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{s} b_k x^k,\ b_k \in A,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ s,$$

т. е. многочленами с коэффициентами из заданного множества A. Впоследствии Р. М. Тригуб увеличил постоянную β^*, показав ([2]), что можно взять $\beta^* = \alpha^{\gamma}$.

В том частном случае, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(a_{n+1}-a_n)}{\log a_n} = 0,$$

из приведенного результата следует, что какой бы ни взять сегмент $[\alpha, \beta]$, $0<\alpha<\beta<1$, указанными многочленами можно приблизить равномерно на $[\alpha, \beta]$ любую функцию из $C[\alpha, \beta]$. Однако неясно, справедливо ли подобное утверждение для сегмента $[0, 1]$.

В связи с этим в настоящей заметке приводится один результат о равномерном приближении на сегменте $[0, 1]$ многочленами с коэффициентами из заданного множества.

Теорема. *Пусть последовательность положительных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k = +\infty,$$

а для определенной при $0<x<+\infty$ положительной неубывающей функции $\varphi(x)$ существует такое число $p>0$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(e^{k\nu_k})}{k^p} < \infty. \tag{1}$$

Если строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $a_0=0$, удовлетворяет условию

$$a_{n+1}-a_n \le \varphi(a_n), \quad n=0, 1, \ldots, \tag{2}$$

то любую функцию $f\in C[0, 1]$, $f(0)=f(1)=0$, можно приблизить равномерно на $[0, 1]$ многочленами с коэффициентами из множества $A=\{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Из приведенной теоремы непосредственно получаем

Следствие. *Пусть строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $a_0=0$, удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(a_{n+1}-a_n)}{\log\log a_n} < +\infty.$$

Тогда любую функцию $f\in C[0, 1]$, $f(0)=f(1)=0$, можно приблизить равномерно на $[0, 1]$ многочленами с коэффициентами из множества $A=\{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обратимся к доказательству теоремы.

Доказательство. Возьмем число ε, $0<\varepsilon<1$. Учитывая (1), подберем такие натуральные числа m и N, что $m>4$, $m>p$ и

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{\varphi(e^{k\nu_k})}{k^m} < \varepsilon. \tag{3}$$

Для заданной функции $f\in C[0, 1]$, $f(0)=f(1)=0$, построим такую функцию $g\in C[0, 1]$, что

$$\|f-g\|<\varepsilon \tag{3}$$

и $g(x)=0$ в окрестностях точек 0 и 1 соответственно. Ясно, что функция

$$\psi(x)=\frac{g(x)}{x^{2mN}(1-x)\ldots(1-x^{2m-1})}$$

принадлежит $C[0, 1]$, причем $\psi(0)=\psi(1)=0$. Поэтому найдется (см. [3]) такой многочлен $q(x)=\sum_{k=0}^{s} c_k x^k$, что

$$|\psi(x)-q(x^{2^m})|<\varepsilon$$

и (5)

$$|c_k|<\varepsilon e^{k\cdot k},\quad k=0, 1, \ldots, s.$$

Отсюда будем иметь

$$|g-r|<\varepsilon, \tag{6}$$

где

$$r(x)=\sum_{k=0}^{s} c_k x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}}).$$

Многочлен с коэффициентами из A, приближающий f, построим следующим образом. Пусть имеем $a_{n_k}\leqslant|c_k|<a_{n_k+1}$, $k=0, 1, \ldots, s$. Тогда, заменяя у многочлена $r(x)$ каждый коэффициент c_k на $a_{n_k}\operatorname{sign} c_k$, получим многочлен $p(x)$ с коэффициентами из A, так как каждый многочлен

$$x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}}),\quad k=0, 1, \ldots, s,$$

составлен со знаками плюс или минус только из степеней

$$x^{2^m(k+N)},\ x^{2^m(k+N)+1}, \ldots, x^{2^m(k+N)+2^m-1}.$$

Чтобы оценить уклонение $p(x)$ от $r(x)$, отметим, что

$$|c_k-a_{n_k}\operatorname{sign} c_k|\leqslant a_{n_k+1}-a_{n_k},\quad k=0, 1, \ldots, s.$$

Значит, в силу (2), (5) и монотонности функции $\varphi(x)$ будем иметь $(0<\varepsilon<1)$

$$|c_k-a_{n_k}\operatorname{sign} c_k|<\varphi(a_{n_k})<\varphi(|c_k|)\leqslant\varphi(e^{k\cdot k}),\quad k=0, 1, \ldots, s,$$

откуда получим

$$|r(x)-p(x)|<\sum_{k=0}^{s}\varphi(e^{k\cdot k})\,x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}}),\quad 0<x\leqslant 1.$$

Однако, так как при $0\leqslant x\leqslant 1$

$$(1-x^{2^l})\leqslant 2^l(1-x),\quad l=0, 1, \ldots,$$

то простыми выкладками будем иметь

$$x^{2^m(k+N)}(1-x)\cdot\ldots\cdot(1-x^{2^{m-1}})\leqslant 2^{\frac{m(m-1)}{2}}x^{2^m(k+N)}(1-x)^m\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{m(m-1)}{2}}\left|\frac{m}{2^m(k+N)+m}\right|^m\leqslant\frac{1}{(k+N)^m}.$$

Следовательно, с учетом (3) и монотонности $\varphi(x)$ получим

$$|r-p|<\varepsilon,$$

что вместе с (4) и (6) даст

$$|f-p|<3\varepsilon.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Определенное изменение доказательства теоремы позволяет установить следующее утверждение:

Пусть строго монотонно возрастающая последовательность действительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, *где* $\lambda_0=0$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda_\infty<+\infty,$$

последовательность положительных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *при любом* $p>0$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty}\nu_k(\lambda_\infty-\lambda_{2k+1})^p=+\infty,$$

и для определенной при $0\leq x<+\infty$ *положительной неубывающей функции* $\varphi(x)$ *имеем*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\nu_k}{\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k}}\right)(\lambda_{2k+1}-\lambda_{2k})<\infty.$$

Если строго монотонно возрастающая к бесконечности последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, *где* $a_0=0$, *удовлетворяет условию*

$$a_{n+1}-a_n\leq\varphi(a_n),\ n=0,\ 1,\dots,$$

то любую функцию $f\in C[0,\ 1]$, $f(0)=f(1)=0$, *можно приблизить равномерно на* $[0,\ 1]$ *квазиполиномами вида*

$$p(x)=\sum_{k=0}^{s}b_kx^{\lambda_k},\quad b_k\in A=\{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty},\ k=0,\ 1,\dots,\ s.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Տրված բազմությունից գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին

Ներկա աշխատանքում Ա. Օ. Գելֆոնդի [1] *աշխատանքի կապակցությամբ ուսումնասիրվում է տրված բազմությունից գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հնարավորությունը* $[0,\ 1]$ *հատվածի վրա։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ եթե անվերջի ձգտող* *խիստ մոնոտոն աճող* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_0=0$, *իրական թվերի հաջորդականությունը բավարարում է*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log(a_{n+1}-a_n)}{\log\log a_n}<\infty$$

պայմանին, ապա՝ ցանկացած $f\in C[0, 1]$, $f(0)=f(1)=0$ *ֆունկցիան կարելի է* $[0, 1]$ *հատվածի վրա հավասարաչափ մոտարկել* $A=\{\pm a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *բազմությունից գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. О. Гельфонд*, Успехи матем. наук, т. 21, вып. 3 (1966). [2] *Р. М. Тригуб*, Изв. вузов. Математика, № 1 (1977). [3] *С. Я. Хавинсон*, Матем. заметки, т. 6, № 5 (1969).