

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Р. АБ. Аветисян

О представлении аналитических функций в круге в виде
бесконечных произведений типа Бляшке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелян 15/IV 1980)

И. Шур ⁽¹⁾ доказал, что если $f(z)$ аналитична и $|f(z)| < 1$ в круге $|z| < 1$, то существует последовательность произведений Бляшке, равномерно сходящаяся к ней внутри этого круга. Простое доказательство этого факта содержится в работе ⁽²⁾ Л. Карлесона. Существенное обобщение этого результата Шура было получено в работе ⁽³⁾ М. М. Джрбашяна в теоремах 5.12—5.13, установленных совместно с Н. У. Аракелян.

В связи с указанными результатами естественно рассмотреть следующую задачу: какие функции, аналитические в $|z| < 1$, можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{R_k(z_k - z)}{R_k^2 - \bar{z}_k z} \quad R_k > |z_k| > 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (R_k - |z_k|) < +\infty. \quad (1)$$

и оценить скорость убывания $(R_k - |z_k|)$ в зависимости от свойств функций. Н. У. Аракелян была предложена схема, сводящая эту задачу к методу Вольфа ⁽⁴⁾, позволяющему разлагать функции в ряды вида $\sum A_k(z_k - z)^{-1}$. Следуя этой схеме, в настоящей заметке устанавливается результат, аналогичный теореме Вольфа—Данжуа ⁽⁵⁾ для рядов вида $\sum A_k(z_k - z)^{-1}$. Затем для некоторых классов аналитических в круге $|z| < 1$ дается представление в виде (1). Устанавливается также скорость приближения некоторыми специальными дробями.

Введем соответствующие обозначения. Пусть $D_R = \{z, |z| < R\}$. Обозначим через $A(\bar{D}_R)$ множество функций, аналитических в D_R и непрерывных в $\bar{D}_R$. В случае $R=1$ $A(D_1)$ будем обозначать через A , а в D_1 через D . Всюду и дальнейшем, если $f(z) \neq 0$, $z \in \bar{D}_R$, $f(0) > 0$, то под функцией $\ln f(z)$ будем понимать главную ветвь логарифма.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма 1, яв-

ляющаяся уточнением одного утверждения работы ⁽²⁾ (см. также ⁽¹⁾, стр. 205, лемма 3).

Лемма 1. Пусть $f \in A(\bar{D}_R)$, $R > 1$, $\operatorname{Re} f(z) < 0$, $z \in \bar{D}_R$, $\operatorname{Im} f(0) = 0$. Пусть $R_1 < R$. Тогда существует рациональная функция вида

$$B_n(R, f, z) = \prod_{k=1}^n \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{R(z_k - z)}{R^2 - \bar{z}_k z},$$

где

$$z_k = \rho_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \quad R_1 < \rho_k < R, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n > \left\lfloor \frac{32\pi R}{R - R_1} (\mu + 1) \right\rfloor,$$

$\mu = \max_{z \in \bar{D}_R} |\operatorname{Re} f(z)|$ такая, что при $z \in \bar{D}_{R_1}$

$$|f(z) - \ln B_n(R, f, z)| < \frac{64\pi R}{n(R - R_1)} \cdot (\mu + \mu^2)$$

Доказательство. На окружности $|z| = R$ возьмем дуги $\gamma_k = \left\{ z; |z| = R, \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq \arg z < \frac{2\pi k}{n} \right\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Числа ρ_k возьмем такими, чтобы

$$\rho_k^2 - R^2 = \frac{R}{\pi} \int_{\gamma_k} \operatorname{Re} f(z) |dz|.$$

Учитывая выбор n , получаем $R_1 < \rho_k < R$. Положим $z_k = \rho_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$ и

$$B_n(R, f, z) = \prod_{k=1}^n \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{R(z_k - z)}{R^2 - \bar{z}_k z}.$$

Учитывая, что при $n > \left\lfloor \frac{32\pi R}{R - R_1} (\mu + 1) \right\rfloor$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{(|z_k| - R)(R|z_k| - \bar{z}_k z)}{R^2 - \bar{z}_k z} \right| < \frac{1}{2},$$

из формулы Шварца при $z \in \bar{D}_{R_1}$ получим

$$\begin{aligned} |f(z) - \ln B_n(R, f, z)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re'' + z}{Re'' - z} \operatorname{Re} f(Re'') dt - \ln B_n(R, f, z) \right| < \\ &< \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re'' + z}{Re'' - z} \operatorname{Re} f(Re'') dt - \sum_{k=1}^n \frac{(|z_k| - R)(R|z_k| - \bar{z}_k z)}{|z_k|(R^2 - \bar{z}_k z)} \right| + \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{R} \sum_{k=1}^n \frac{(|z_k|^2 - R^2)^2}{|R^2 - \bar{z}_k z|^2}.$$

Оценим сначала последнюю сумму

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \sum_{k=1}^n \frac{(|z_k|^2 - R^2)^2}{|R^2 - \bar{z}_k z|^2} &\leq \frac{4\pi R}{n} \mu^2 \cdot \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \frac{|d\zeta|}{|R^2 - \bar{z}_k z|^2} \\ &\leq \frac{4\pi R}{n} \mu^2 \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{32\pi R}{n(R - R_1)} \mu^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \operatorname{Re} f(Re^{it}) dt - \sum_{k=1}^n \frac{(|z_k| - R)(R|z_k| + \bar{z}_k z)}{|z_k|(R^2 - \bar{z}_k z)} \right| = \\ = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} \operatorname{Re} f(Re^{it}) \left(\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} - \frac{2R^2(R|z_k| + \bar{z}_k z)}{(R^2 - \bar{z}_k z)(R|z_k| + |z_k|^2)} \right) dt \right| \leq \\ \leq \frac{32\pi R}{n(R - R_1)} \cdot (\mu + \mu^2). \end{aligned}$$

Используя эту лемму и метод Вольфа (⁴), может быть доказана

Теорема 1. Пусть $f \in A(\bar{D}_R)$, $R > 1$, $|f(z)| < 1$ при $z \in \bar{D}$. Тогда f представляется в $\bar{D}$ в виде

$$f(z) = \exp(i\alpha) z^\alpha B(z) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{R_k(z_k - z)}{R_k^2 - \bar{z}_k z}, \quad (2)$$

где $\operatorname{Im} i = 0$, $B(z)$ — конечное произведение Бляшке, соответствующее нулям $f(z)$ в D , а точки z_k и числа R_k удовлетворяют неравенствам

$$1 < |z_k| < R_k, \quad R_k - |z_k| < \exp(-ck^{1-\varepsilon});$$

$c > 0$ и не зависит от k , а ε — произвольное положительное число.

Замечание. В работе Т. А. Леонтьевой (¹) показано, что в условиях теоремы 1 для рядов вида $\sum A_k(z_k - z)^{-1}$ имеет место более точная оценка: $|A_k| < \exp(-ck^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. В этой же работе отмечено, что из одного результата работы А. А. Гончара (⁶) следует, что A_k не могут быть выбраны так, чтобы $|A_k| < \exp(-ck)$. Применяя этот результат к логарифмической производной функции вида (2), получаем, что $f \in A(\bar{D}_R)$, $R > 1$ не может быть представлена в D в виде (2) так, чтобы $R_k - |z_k| < \exp(-ck)$. Пусть $f \in A$. Через $\omega_m(f, \delta)$ обозначим m -й модуль непрерывности (см. (⁶)) на ∂f . Тогда, используя

лемму 1 и теорему С. Б. Стечкина о приближении полиномами, могут быть доказаны следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть $f \in A$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_m(f, \frac{1}{k}) \cdot \ln \frac{1}{k} = 0$, то f представляется в $\bar{D}$ в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{R_k(\bar{z}_k - z)}{R_k^2 - \bar{z}_k z} + i \operatorname{Im} f(0), \quad (3)$$

где $|\bar{z}_k| > 1$, $R_k > 1$,

$$|R_k - |\bar{z}_k|| < C_m(f) \cdot \frac{\omega_m\left(f, \frac{1}{k}\right)}{k}. \quad (4)$$

Наметим схему доказательства. Можно считать, что $\operatorname{Im} f(0) = 0$, $\omega_m(f, 1) \leq 1$. Тогда из (*) следует, что найдутся полиномы $P_{2^n}(z)$ степени 2^n такие, что при $z \in \bar{D}$

$$|f(z) - P_{2^n}(z)| < 2L_m \omega_m(f, 2^{-n}),$$

где $\operatorname{Im} P_{2^n}(0) = 0$, L_m — целое и зависит только от m . Положим $R_n = 1 + 2^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда из неравенства Бернштейна (см. (10), стр. 101) и леммы 1, беря $j_0 = \left\lfloor \frac{130\pi L_m(\mu + \mu^2 + 1)}{\omega_m(f, 1)} \right\rfloor$, получаем, что при $z \in \bar{D}_{R_0}$

$$|P_2(z) - \ln B_{j_0}(R_0, P_1, z)| < 13 L_m \omega_m(f, 1).$$

Положим $f_0(z) = P_2(z)$, а при $n \geq 1$

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln B_{j_k}(R_k, f_k, z)$$

и предположим, что при $n \geq 1$

$$|f_n(z)| < 13 L_m \omega_m(f, 2^{-(n-1)}), \quad z \in \bar{D}_{R_n}. \quad (5)$$

Учитывая (5), применяя лемму 1 к $f_n(z)$ и кругу $\bar{D}_{R_n}$ и беря $j_n = L_m 2^{n+20} (R_n - R_{n-1})^{-1}$, из неравенства Бернштейна получаем, что при $z \in \bar{D}_{R_{n+1}}$

$$\left| P_{2^{n+1}}(z) - \sum_{k=0}^n \ln B_{j_k}(R_k, f_k, z) \right| < 13 L_m \omega_m(f, 2^{-n}).$$

Продолжая этот процесс и учитывая выбор j_n и условие $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_m(f, \frac{1}{k}) \cdot \ln \frac{1}{k} = 0$, получаем для f представление (4) из неравенства (5).

Из теоремы 2 может быть получено

Следствие 1. Пусть $f \in A$. Если $0 < |f(e^{it})| < 1$, $\int_0^1 \frac{\omega_m(f, t)}{t} dt < 1$,

то f в $\bar{D}$ представляется в виде (2), причем

$$R_k - |\bar{z}_k| < C_m(f) \cdot \frac{\omega_m\left(f, \frac{1}{k}\right)}{k}.$$

Аналогично теореме 2 может быть доказана

Теорема 3. Пусть $f \in A$. Тогда f представляется в $\bar{D}$ в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{z}_k - z} - \frac{1}{\bar{z}_k - z} \right), \quad |\bar{z}_k| > 1, \quad |\bar{z}_k| > 1, \quad \bar{z}_k = \frac{R_k}{\bar{z}_k}$$

так, что имеют место неравенства

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\bar{z}_k - z} - \frac{1}{\bar{z}_k - z} \right) \right| < C_1(f) \cdot \omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad z \in \bar{D};$$

$$|\bar{z}_k - \bar{z}_k| < C_2(f) \cdot \frac{\omega_1\left(f, \frac{1}{k}\right)}{k^2}.$$

В следствии 1 для равномерной сходимости бесконечного произведения в представлении (2) требовалось, чтобы $0 < |f(e^{it})| < 1$. Если отказаться от этих условий, то может быть доказана

Теорема 4. Пусть $f(z)$ аналитична в D , $0 < |f(z)| < 1$, $z \in D$ и $f(e^{it})$ радиальные предельные значения f . Тогда f представляется в D в виде (1) тогда и только тогда, когда функция $|f(e^{it})|$ полунепрерывна снизу, $|f(e^{it})| < 1$ и

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{f(re^{it})}{f(e^{it})} \right| dt = 0.$$

Из теоремы 4 может быть получено

Следствие 2. Для того, чтобы функция ограниченного вида представлялась в виде

$$f(z) = \exp(\mu z) \cdot \frac{B_1(z) \cdot \Pi_1(z)}{B_2(z) \cdot \Pi_2(z)}, \quad (6)$$

где $\operatorname{Im} \mu = 0$, $B_1(z)$, $B_2(z)$ — произведения Бляшке, соответствующие нулям и полюсам f , а $\Pi_1(z)$, $\Pi_2(z)$ — произведения вида (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{f(re^{it})}{f(e^{it})} \right| dt = 0.$$

Как мы видим из теоремы 4 и следствия 2, не любую функцию ограниченного вида можно представить в D в виде (6). Однако используя факторы несколько иного вида, может быть доказана

Теорема 5. Пусть f аналитична в D и $0 < |f(z)| < 1$ при $z \in D$. Тогда f представляется в D в виде

$$f(z) = \exp\left(b \frac{1+z}{1-z}\right) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-a_k}{z-b_k}\right) \cdot \exp\left(\frac{a_k-b_k}{z-b_k}\right),$$

где $b > 0$, $a_k, b_k \in D$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k|^2 < +\infty$.

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеляна за постановку задачи и руководство работой.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ռ. ԱՐ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Բլաշկեի տիպի անվերջ արտադրյալների տեսնով շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների ներկայացման մասին

Հոգվածում ցույց է տրվում, որ $|z| < R$ շրջանում զրո չդարձող և անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիան ($|f(z)| < 1$) ներկայացվի

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{R_k(z_k - z)}{R_k^2 - \bar{z}_k z}, \quad (|z_k| > R)$$

անվերջ արտադրյալի տեսքով, որտեղ $R_k > |z_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} R_k - |z_k| < +\infty$ անհրաժեշտ է և բավարար. որպեսզի $|f|$ — և զրալին արժեքները լինեն կիսաանընդհատ ներքևից և

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{f(re^{it})}{f(se^{it})} \right| dt = 0.$$

Ընդց է տրվում նաև, որ սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների դասը կարելի է ներկայացնել անվերջ արտադրյալների տեսքով. օգտագործելով ավելի ընդհանուր ֆակտորներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ J. Schur, J. Reine und angew. Math., vol. 147 (1916), vol. 148 (1916). ² L. Carleson, Ann. of Math., vol. 76 (1962). ³ М. М. Джрбашян, Мат. сб., т. 79 (121), № 4 (1963). ⁴ J. Wolff, C. r. Acad. sci., vol. 173 (1921). ⁵ A. Danföy, Bull. soc. math. France, vol. 52 (1924). ⁶ L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New-York, 1970. ⁷ Т. А. Леонтьева, Мат. заметки, т. 4, № 2 (1968). ⁸ А. А. Гончар, Мат. сб., 76 (118), № 1 (1968). ⁹ С. Б. Стечкин, Известия АН СССР, сер. мат., т. 15, № 3 (1950). ¹⁰ Дж. Уолш, Интерполяция и аппроксимации рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.