ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 2

УДК 513.013, 513.82

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

О геометрии симметрического пространства пар точек n-мерного конформного пространства

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/IV 1980)

В работе [1] методами, изложенными в [2], [3], изучалась дифференциально-геометрическая структура, определяемая n-кратным интегралом, зависящим от n параметров, на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M. Было установлено, что такой интеграл индуцирует на многообразии M псевдориманову связность специального типа, которая оказывается соответствующей псевдоримановой метрике Рашевского [4]. Здесь естественно возникает задача о выделении классов интегралов, определяющих на многообразии двойного расслоения переменных и параметров заданные геометрии Рашевского. Эта задача была решена для псевдоевклидовых пространств Рашевского (кривизна связности равна нулю). Оказалось, что соответствующие интегралы обнаруживают формальное сходство с классическими интегралами Лапласа—Фурье.

В настоящей работе последняя задача решается для некоторого класса простейших пространств—симметрических пространств Рашевского пар точек n-мерного конформного пространства C_n. Отметим, что симметрические пространства Рашевского с простыми группами движений найдены А. С. Феденко [5].

Структурные уравнения псевдориманова пространства Рашевского можно представить в виде

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k \\ d\omega_i = -\omega^k_i \wedge \omega_k \\ d\omega^i_k = \omega^i_s \wedge \omega^s_k + R^{ip}_{kq}\, \omega^q \wedge \omega_p \end{cases} \tag{1}$$

В частности, эти уравнения будут иметь место, если величины R^{ip}_{kq}, в совокупности образующие тензор кривизны пространства двойного расслоения M (латинские индексы принимают значения от 1 до n), определить формулой

$$K^{ir}_{pq} = K(\delta^i_p \delta^r_q + \delta^i_q \delta^r_p - \delta^{ir} \delta_{pq}), \tag{2}$$

где K — некоторая гладкая функция. Дифференцированием последнего уравнения системы (1) легко можно показать, что при $n > 1$

$$K = \mathrm{const}.$$

Ограничение, накладываемое условием (2) на касательный репер, выражается соотношением

$$\omega^i_k + \omega^k_i = \frac{2\delta^i_k}{n} \sum_{l=1}^{n} \omega^l_l. \tag{3}$$

Метрическая форма рассматриваемого псевдориманова пространства Рашевского (1) имеет вид ([1]).

$$ds^2 = \omega^i \cdot \omega_i. \tag{4}$$

При этих условиях тензор Риччи равен

$$K^i_p = n\,K\,\delta^i_p.$$

Замкнутость системы форм ω^i, ω_i, ω^i_k $(i,\ k = 1,\dots,n)$, удовлетворяющих системе структурных уравнений (1) вместе с условиями (2) и (3), указывает на существование пространства, локальные структурные формы которого (главные и вторичные) с точностью до постоянных множителей совпадают с заданными, и имеют место уравнения, аналогичные (1). Иными словами, ближайшая цель состоит в отыскании пространства, изоморфного ([6]) пространству, определяемому структурными уравнениями (1) (вместе с условиями (2) и (3)).

Рассмотрим структурные уравнения n-мерного конформного пространства ([6]):

$$\left|\begin{array}{l} d\theta^i_0 = \theta^i_k \wedge \theta^k_0 + \theta^i_0 \wedge \theta^0_0 \\ d\theta^0_i = \theta^0_k \wedge \theta^k_i + \theta^0_0 \wedge \theta^0_i \\ d\theta^i_k = \theta^i_p \wedge \theta^p_k + \theta^i_0 \wedge \theta^0_k \\ d\theta^0_0 = \theta^0_k \wedge \theta^k_0 \\ \theta^i_k + \theta^k_i = 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что искомое соответствие форм можно определить формулами

$$\left|\begin{array}{l} \omega^i = \mu\theta^i_0 \\ \omega_i = \nu\,\theta^0_i \\ \omega^i_k = \theta^i_k - \delta^i_k \theta^0_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \omega^i_i = -\,n\,\theta^0_0 \end{array}\right. \tag{6}$$

где величины μ и ν суть некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$\mu\nu K = 1.$$

Уравнения инфинитезимального перемещения репера $(e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ в конформном пространстве можно представить в виде ([6])

$$\left\{\begin{array}{l} de_0 = -\theta_0^0 e_0 - \theta_0^k e_k \\ de_i = -\theta_i^0 e_0 - \theta_i^k e_k \\ de_{n+1} = \theta_k^0 e_k + \theta_0^0 e_{n+1}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим в изучаемом конформном пространстве совокупность пар точек. Из соотношений (6) видно, что вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа

$$\omega^i = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

в конформном пространстве отвечает также вполне интегрируемая система

$$\theta_0^i = 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Эта система определяет точку (первый элемент пары). Аналогично вполне интегрируемая система уравнений

$$\theta_i^0 = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

определяет второй элемент пары. Таким образом, структурные уравнения (5), а значит, и (1) с условиями (2), (3), соответствуют пространству пар точек n-мерного конформного пространства (точки могут и совпадать). Заметим, что многообразие двойного расслоения M, реализованное в виде пространства пар точек n-мерного конформного пространства, имеет одинаково устроенные слои: типовым слоем как первого, так и второго расслоения является n-мерное конформное пространство с фиксированной точкой.

В ([1]) было показано, что n-кратный интеграл полубазовой n-формы

$$\Omega = \lambda\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n,$$

зависящий от n параметров, задает на многообразии двойного расслоения переменных и параметров M структуру псевдориманова пространства Рашевского, если имеет место уравнение

$$d \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^i = \lambda^i \omega_i + \lambda_i \omega^i,$$

причем выполнено условие

$$d(\lambda^i \omega_i) = \omega^i \wedge \omega_i.$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения будут удовлетворены, если величины λ^i и λ_i определить из дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d\lambda^i - \lambda^k\omega^i_k = p\,\omega^i - \frac{K}{p}\lambda^i\lambda^j\omega_j + H\omega_i \\ d\lambda_i + \lambda_k\omega^k_i = -\frac{K}{q}\lambda_j\lambda_i\omega^j + P\omega^i + q\omega_i, \end{cases} \tag{7}$$

где величины p и q являются постоянными, удовлетворяющими условию

$$p - q = nK,$$

а P и H суть некоторые гладкие функции, такие, что

$$\begin{cases} dH - \frac{H}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^i_i - K\lambda^i\omega^i = -\frac{KH}{p}\lambda^i\omega_i + \frac{H}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^i_i \\ dP + \frac{P}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^i_i - K\lambda_i\omega_i = -\frac{KP}{q}\lambda_i\omega^i - \frac{P}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega^i_i . \end{cases} \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что система форм ω^i, ω_i, ω^i_k и функций λ^i, λ_i, H, P $(i, k = 1, \ldots, n)$ замкнута. Отсюда следует, что система уравнений (7)—(8) определяет семейство n-кратных интегралов, зависящих от n параметров и задающих на многообразии M структуру псевдориманова пространства Рашевского (1)—(2)—(3). Это семейство зависит от $2n+3$ произвольных констант (начальных значений) $\lambda^1_0, \ldots, \lambda^n_0$, $(\lambda_1)_0, \ldots, (\lambda_n)_0$, H_0, P_0, p.

Перейдем теперь к геометрической интерпретации. Зафиксируем в пространстве пар точек n-мерного конформного пространства некоторый элемент (две точки). Условие фиксации двух точек

$$\begin{cases} e_1 = e_0 + A^i e_i + A^{n+1} e_{n+1} \\ e_2 = A_{n+1} e_0 + A_i e_i + e_{n+1} \end{cases} \tag{9}$$

конформного пространства можно представить в виде

$$\begin{cases} de_1 = \alpha e_1 \\ de_2 = \beta e_2. \end{cases} \tag{10}$$

Из соотношений (9) и (10) легко получить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложений (9):

$$\begin{cases} dA^i - A^k(\theta^i_k - \delta^i_k\theta^0_0) = \theta^i_0 - A^iA^k\theta^0_k - A^{n+1}\theta^0_i \\ dA_i + A_k(\theta^k_i - \delta^k_i\theta^0_0) = A_iA_k\theta^k_0 + A_{n+1}\theta^i_0 - \theta^0_i \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} dA^{n+1} + A^{n+1}\theta^0_0 + A^i\theta^i_0 = -A^{n+1}A^i\theta^0_i - A^{n+1}\theta^0_0 \\ dA_{n+1} - A_{n+1}\theta^0_0 - A_i\theta^0_i = A_{n+1}A_i\theta^i_0 + A_{n+1}\theta^0_0 . \end{cases} \tag{12}$$

Сравнение систем уравнений (7) и (8), с одной стороны, и систем уравнений (11) и (12) —с другой, показывает, что величины $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, H, P можно связать с $A^1, \ldots, A^n$, $A_1, \ldots, A_n$, A^{n+1}, A_{n+1} соотношениями

$$
\left|\begin{aligned} & \nu_i = sA_i \\ & \nu_i = tA_i \\ & H = hA^{n+1} \\ & P = rA_{n+1} \end{aligned}\right. \tag{13}
$$

где коэффициенты пропорциональности s, t, h, r предполагаются постоянными. Подставляя эти выражения, а также (6) в уравнения (7) и (8) и сравнивая полученные соотношения с (11) и (12), получим выражения этих коэффициентов:

$$
s = \mu p, \ t = -\nu q, \ h = -\frac{\mu p}{\nu}, \ r = -\frac{\nu q}{\mu}.
$$

Соотношения (13) показывают, что семейство n-кратных интегралов, зависящих от n параметров, определяемое системой дифференциальных уравнений (7)—(8), находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством пар точек n-мерного конформного пространства C_n (точки могут и совпадать). Тем самым доказана основная

Теорема. *Каждое решение системы дифференциальных уравнений (7)—(8) задает интеграл, определяющий геометрию многообразия пар точек n-мерного конформного пространства C_n. При заданных постоянных p и q, удовлетворяющих условию $p-q=nK$, множество решений этой системы находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством пар точек пространства C_n. В частности, при $A^{n+1} = A_{n+1} = 1$, $A^i = A_i$, $i = 1, \ldots, n$ получаются интегралы, соответствующие парам совпадающих точек.*

Последнее утверждение теоремы с очевидностью следует из соотношений (9).

Перейдем теперь к выделению частного класса интегралов, порождающих на многообразии двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M структуру пространства пар точек n-мерного конформного пространства. Покажем, что геометрия пространства пар совпадающих точек n-мерного конформного пространства определяется на M интегралом формы вида

$$
\Omega = \frac{c\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n}{[(x^1-y_1)^2 + \ldots + (x^n-y_n)^2]^{\gamma}}, \tag{14}
$$

где $x^1, \ldots, x^n$—основные переменные, $y_1, \ldots, y_n$—параметры, c и γ суть некоторые постоянные. Для этого достаточно показать, что метрическая форма на многообразии двойного расслоения M, задаваемая интегралом формы (14), инвариантна относительно конформных преобразований. Но конформные преобразования сводятся к преобразованиям инверсии и подобия ([7]). Инвариантность формы (14) относительно подобий устанавливается просто: нужно отдельно сделать проверку для преобразований гомотетии, параллельного переноса и вращения. Аналогичным образом проверяется, что и преобразование инверсии

$$x^i = \frac{x^i}{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2}, \qquad y_\alpha = \frac{y_\alpha}{\sum_{\beta=1}^{n} (y_\beta)^2} \tag{15}$$

сохраняет форму (14). Действительно, продифференцировав (15), получим связь между дифференциалами старых и новых переменных и параметров:

$$dx^i = \left[\frac{\delta^i_k}{\sum_{l=1}^{n} (x^l)^2} - \frac{2\bar{x}^i \bar{x}^k}{\left(\sum_{l=1}^{n} (x^l)^2\right)^2} \right] d\bar{x}^k,$$

$$dy_\alpha = \left[\frac{\delta^\beta_\alpha}{\sum_{\gamma=1}^{n} (y_\gamma)^2} - \frac{2\bar{y}_\alpha \bar{y}_\beta}{\left(\sum_{\gamma=1}^{n} (y_\gamma)^2\right)^2} \right] d\bar{y}_\beta.$$

Нетрудно показать ([8]), что часть компонент метрического тензора пространства Рашевского, соответствующего интегралу формы $\Omega = K dx^1 \wedge \ldots dx^n$, связана с коэффициентом K соотношением вида

$$a^\alpha_i = \frac{\partial^2 \ln K}{\partial x^i \, \partial y_\alpha}.$$

В случае формы (14) получаем

$$a^\alpha_i = 2 \frac{\delta^\alpha_i \sum_{l=1}^{n} (x^l - y_l)^2 - 2(x^\alpha - y_\alpha)(x^i - y_i)}{\left(\sum_{l=1}^{n} (x^l - y_l)^2\right)^2}.$$

Заменяя в выражении метрической формы $a^\alpha_i \, dx^i \, dy_\alpha$ (остальные компоненты метрического тензора равны нулю) переменные и параметры, а также их дифференциалы по формулам (14) и (15), в результате тождественных преобразований получаем

$$a^\alpha_i dx^i dy_\alpha = 2 \frac{\delta^\beta_k \left(\sum_{l=1}^{n} (\bar{x}^l - \bar{y}_l)^2\right) - 2(\bar{x}^\beta - \bar{y}_\beta)(\bar{x}^k - \bar{y}_k)}{\left(\sum_{l=1}^{n} (\bar{x}^l - \bar{y}_l)^2\right)^2} d\bar{x}^k d\bar{y}_\beta \; (= \bar{a}^\alpha_i d\bar{x}^i d\bar{y}_\alpha),$$

что и требовалось доказать. Наконец, нетрудно проверить, что тензор кривизны полученного пространства ковариантно постоянен. Можно показать, что интеграл формы (11) принадлежит классу, указанному в теореме, и соответствует случаю пар совпадающих точек.

Выражаю глубокую благодарность А. М. Васильеву за постановку задачи и внимание к работе.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ս. Ք. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

C^n կոնֆորմ տարածության կետերի զույգերի սիմետրիկ տարածության երկրաչափության մասին

Հայտնի է, որ n պարամետրերից կախված n-պատիկ ինտեգրալին կարելի է ինվարիանտ ձևով, այսինքն լոկալ կոորդինատական համակարգի ընտրությունից անկախ, միացնել հատուկ տեսքի աֆինական կապակցություն ինտեգրման փոփոխականների և պարամետրերի բազմաձևության վրա, այն է, Ռաշևսկու տարածության պսեդոռիմանյան կապակցություն։ Այստեղ բնականաբար առաջ է գալիս Ռաշևսկու տվյալ տարածության ստրուկտուրան առաջացնող ինտեգրալների դասի առանձնացման խնդիրը։ Պսեդոէվկլիդյան տարածության դեպքում համապատասխան դասի ինտեգրալները ձևականորեն նման են Ֆուրյե-Լապլասի ինտեգրալներին։

Սույն աշխատանքում վերը նշված խնդիրը լուծված է զրոյից տարբեր կորություն ունեցող պարզագույն տարածությունների դասերից մեկի՝ n-չափանի կոնֆորմ տարածության կետերի զույգերի սիմետրիկ տարածության համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Х. Арутюнян*. ДАН АрмССР, т. 61, № 1 (1975). [2] *А. М. Васильев*. Мат. сб., т. 70(112), № 4 (1966). [3] *А. М. Васильев*. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, 1966. [4] *П. К. Рашевский*. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 6 (1948). [5] *А. С. Феденко*. УМН, т. 12, № 3(75) (1957). [6] *Э. Картан*. Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Казань, 1962. [7] *Б. А. Розенфельд*, Неевклидовы геометрии, Гостехиздат, М., 1955. [8] *С. Х. Арутюнян*, Геометрия n-кратных интегралов, зависящих от параметров, дис., Минск, 1977.