ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

С. А. Григорян

Об особенностях обобщенных аналитических функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 26/III 1980)

0°. Пусть Γ—подгруппа аддитивной группы вещественных чисел, снабженная дискретной топологией, $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma: x > 0\}$—подполугруппа группы Γ, а G—группа характеров группы Γ. По теореме двойственности Понтрягина G является компактной абелевой группой.

Рассмотрим на локально компактном пространстве Ω_Γ, полученном из декартова произведения $G \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$, систему $\{\omega^x\}_{x \in \Gamma_+}$ непрерывных функций на заданных следующим образом: $\omega^x(\alpha \times r) = \alpha(x)\, r^x$.

Комплекснозначную функцию f, определенную на открытом множестве $D \subset \Omega_\Gamma$, называют обобщенно-аналитической, или просто аналитической, если для каждой точки множества D существует такая окрестность $U \subset D$, что функция f аппроксимируется на U линейными комбинациями над $\mathbf{C}^1$ функций из $\{\omega^x\}_{x \in \Gamma_+}$.

Линейные комбинации функций из $\{\omega^x\}_{x \in \Gamma_+}$ будем называть полиномами.

В случае, когда Γ изоморфна группе целых чисел, пространство Ω_Γ изоморфно комплексной плоскости, и обобщенная аналитичность в этом случае совпадает с классической аналитичностью.

Множество $D \subset \Omega_\Gamma$ назовем ограниченным, если $\overline{D}$—компакт.

В теории аналитических функций одной комплексной переменной хорошо известны теорема Римана о продолжении и теорема Пикара о поведении функции вблизи существенной особой точки.

В данной заметке формулируются результаты, являющиеся аналогами вышеуказанных теорем.

1°. Каждая аналитическая функция, заданная на связном открытом множестве D комплексной плоскости $\mathbf{C}^1$, удовлетворяет условию единственности, т. е. если f равно нулю на некотором открытом подмножестве множества D, то $f = 0$ на D.

Естественно поставить вопрос: верно ли аналогичное утверждение в пространстве Ω_Γ в случае, когда Γ не изоморфна группе целых чисел. На этот вопрос отвечает.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченное открытое в Ω_Γ множество. Для того чтобы каждая аналитическая на D функция удовлетворяла условию единственности, необходимо, чтобы точка $o = G\times\{0\}\in\Omega_\Gamma$ принадлежала множеству*

$$\hat{D} = \{u\in\Omega_\Gamma,\ |p(u)|\leqslant\sup_D |p| \text{ для любого полинома } p\}.$$

Существуют примеры, показывающие, что приведенное в теореме 1 условие не является достаточным.

2°. Пространство Ω_Γ можно представить в виде $\Omega_\Gamma = (\bigcup_i \Omega_i)\cup\{o\}$ (см. лемму 1 из ([1])), где $o = G\times\{0\}$, а множества Ω_i, $i\in I$, попарно не пересекаются, связны, всюду плотны в Ω_Γ и удовлетворяют следующим условиям:

а) для любых $i, j \in I$ существует $\alpha\in G$ такое, что

$$\Omega_i = \alpha\Omega_j \qquad (\alpha\cdot(\beta\times r)) = (\alpha\beta)\times r;$$

б) для любого $i\in I$ существует такое взаимно-однозначное непрерывное отображение Ψ_i из комплексной плоскости $\mathbf{C}^1$ на Ω_i, что для каждого $\omega^x\in\{\omega^x\}_{x\in\Gamma}$ выполняется равенство

$$\omega_0^x\Psi_i(z) = \exp(-x\cdot z).$$

Из условий а) и б) следует утверждение, аналогичное теореме Лиувилля (см. ([2])): если обобщенная аналитическая функция, определенная на всем пространстве Ω_Γ, ограничена, то она постоянна.

Определение. *Пусть D — открытое множество в Ω_Γ. Подмножество $E\subset D$ назовем тонким, если для каждой точки из D существует такая окрестность $U\subset D$ и такая аналитическая функция f на U, что:*

а) *функция f обращается в нуль на множестве $E\cap U$;*

б) *для каждого $i\in I$ множество $\Omega_i\cap E$ не более чем счетно.*

Примером тонкого множества является множество нулей аналитической функции, определенной на всем пространстве Ω_Γ. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что нули не каждой аналитической функции образуют тонкое множество. Вообще говоря, тонкое множество не является одноточечным. Единственный пример одноточечного тонкого множества — $\{o\}$, где $o = G\times\{0\}\in\Omega_\Gamma$.

Пусть D — открытое множество в Ω_Γ и E — подмножество в D. Функцию f, определенную на множестве $D\setminus E$, назовем локально ограниченной, если для каждой точки из D существует такая окрестность $U\subset D$, что функция f ограничена на $U\cap(D\setminus E)$.

Теорема 2. *Пусть E — тонкое подмножество открытого множества D в Ω_Γ и f — аналитическая функция на $D\setminus E$, локально ограниченная на D. Тогда существует единственная функция g, аналитическая на D и совпадающая с f на $D\setminus E$.*

Следствие. *Пусть E — тонкое подмножество связного открытого множества D в Ω_Γ. Тогда $D\setminus E$ связно.*

Пусть E — тонкое множество в D, а Y — такое подмножество в E, что каково бы ни было открытое множество $U\subset D$, множество $Y\cap U$ не является тонким в U.

Теорема 3. *Пусть f — аналитическая функция на $D\setminus Y$. Тогда существует единственная аналитическая функция g на $D\setminus\{\sigma\}$, совпадающая с f на $D\setminus E$.*

Следствие. *Пусть f — аналитическая функция, заданная на всем пространстве D, кроме, быть может, некоторого конечного числа точек. Тогда функция f однозначно продолжается до аналитической функции, определенной на всем $D\setminus\{\sigma\}$.*

3°. Пусть D — открытое множество в Ω_Γ и E — тонкое подмножество в D.

Лемма 4. *Пусть f — аналитическая функция на $D\setminus E$. Тогда поведение функции f в окрестности каждой точки $e\in E$ может быть только следующим:*

а) *$f(e_1)$ стремится к конечному пределу для любого $e_1\to e$, $e_1\in D\setminus E$;*

б) *$|f(e_1)|$ стремится к ∞ для любого $e_1\to e$, $e_1\in D\setminus E$;*

в) *в каждой окрестности точки $e\in E$ функция f принимает все значения, сколь угодно близкие каждому комплексному числу.*

Точку множества E, в окрестности которой функция f удовлетворяет условию б), будем называть полюсом, а условию в) — существенно особой точкой.

Теорема 5. *Пусть $\sigma\in D$ и f — аналитическая функция на $D\setminus\{\sigma\}$. Если точка σ является полюсом для f, то существует единственная функция $w\in\{w^x\}_{x\in\Gamma}$, такая, что f/w — аналитическая функция на D.*

Теорема 6. *В каждой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает все значения за исключением, быть может, одного.*

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների եզակիությունների մասին

Դիցուք Γ-ն իրական թվերի խմբի որոշ ենթախումբ է, G-ն L խմբի համալուծ խումբ է, իսկ $\Omega_\Gamma = G\times[0, +\infty)/G\times\{0\}$: Կամայական $x\in L_+=\{x\in L:\ x\geq 0\}$ տարրին համապատասխանում է $w^x(\alpha\times r)=\alpha(x)$ անընդհատ ֆունկցիան Ω_Γ տարածության վրա. Ω_Γ-ի D բաց ենթաբազմության վրա սահմանված f ֆունկցիան կոչվում է ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիա, եթե f-ը D-ի ամեն մի կետի շրջակայքում մոտարկվում է w^x ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաներով:

Հոդվածում ուսումնասիրվում են ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների հատկությունները։ Մասնավորապես, ստացված են Ռիմանի և Պիկարի թեորեմների անալոգները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Григорян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 3 (1979). [2] *Т. В. Тонев, Д. К. Станков*, Докл. Б. А. Н., № 1, 1980.