

УДК 621.396.677.4

РАДИОФИЗИКА

Мк. М. Джрбашян, О. С. Литвинов

Об одном классе диаграмм направленности в теории антенн

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Мирзаябяном 14/III 1980)

Задача определения связи между спектром волнового процесса в неоднородной среде и функцией распределения его источников в настоящее время представляет большой практический интерес для исследования распространения радиоволн в неоднородной атмосфере через оболочку и т. п.

Рассмотрим простейшую излучающую систему в виде плоской ленты шириной L , на которой распределен ток $I(x)$. Излучаемой антенной спектр волн $\Phi(\xi)$ (диаграмма направленности ДН) и ток $I(x)$ в однородном пространстве связаны преобразованием Фурье, т. е.

$$\Phi(\xi) = \int_{-L/2}^{L/2} I(x) e^{i\xi x} dx \quad (1)$$

Эта же система под неоднородной оболочкой в виде двух бесконечных плоскостей, параллельных ленте, будет иметь другую диаграмму направленности $\Phi(\xi)$ из-за взаимодействия излучения антенны с оболочкой.

В общем случае диаграмма направленности $\Phi(\xi)$ равна

$$\Phi(\xi) = \int_{-L/2}^{L/2} P(T(\xi); x) I(x) dx, \quad (2)$$

где $P(T(\xi); x)$ — неизвестное ядро интегрального соотношения между $\Phi(\xi)$ и $I(x)$, которое зависит от коэффициента прохождения оболочки $T(\xi)$ по отношению к плоской волне ($\xi = k \sin \theta$ — обобщенная угловая координата, связанная с направлением распространения плоской волны под углом θ к нормали ленты).

В статье рассмотрен вывод интегрального соотношения $\Phi(\xi)$ и $I(x)$ для частного вида функции $T(\xi)$. Не конкретизируя вид функ-

ции $T(\xi)$, отметим наиболее существенные свойства спектральной функции $\Phi(\xi)$.

Во-первых, если $\Phi_1(\xi)$ спектр волны за оболочкой, то $\Phi_1(\xi) = T(\xi)\Phi(\xi)$ и из условия конечности потока энергии, переносимой излучением антенны, необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\xi)|^2 |T(\xi)|^2 d\xi < +\infty, \quad (3)$$

т. е. спектр волн, излучаемый антенной под оболочкой, интегрируем с весом, равным коэффициенту прохождения оболочки $T(\xi)$.

Второе важное свойство спектральной функции состоит в том, что $\Phi(\xi)$ целая функция первого порядка типа $L/2$, поскольку спектр формируется током, равным нулю за пределами отрезка L . Перечисленные свойства $\Phi(\xi)$ устанавливают однозначную связь между $\Phi(\xi)$ и $I(x)$, что было отмечено в (1).

Для исследования функциональной зависимости $\Phi(\xi)$ от $I(x)$ необходимо задаться конкретной зависимостью $T(\xi)$. Это удобно сделать с помощью параметрического задания свойств неоднородной оболочки в виде степенной зависимости ее коэффициента прохождения $T(\xi) = |\xi|^\mu$, где μ — параметр. Тогда при $\mu = 1$ осуществляется непрерывный переход к однородному пространству, а при $\mu \neq 1$ указанная зависимость моделирует реальную неоднородность оболочки.

Использование степенной функции в качестве модели коэффициента прохождения неоднородной оболочки делает возможным адекватное применение теории интегральных представлений целых функций, построенной в монографии (2).

Как хорошо известно, спектр волн $\Phi(\xi)$, излучаемый антенной длиной L в однородной среде, и распределение тока на антенне $I(x)$ ($-L/2 < x < L/2$) связаны между собой преобразованием Фурье (1). При этом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \Phi(\xi) d\xi = \begin{cases} I(x); & x \in (-L/2; L/2) \\ 0; & x \notin (-L/2; L/2). \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через W_α класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа α ($\alpha > 0$), подчиненных условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (5)$$

Тогда согласно теореме Винера — Пэли для любой функции распределения тока $I(x)$, соответствующая ей спектральная функция $\Phi(\xi) \in W_{L/2}$, и, наоборот, любой функции $\Phi(\xi) \in W_{L/2}$ посредством формулы (4) можно ставить в соответствие определенную функцию распределения тока $I(x)$ на антенне $-L/2 < x < L/2$, равную нулю при $x \notin (-L/2; L/2)$.

Мы будем рассматривать задачу вывода надлежащих соотношений, связывающих функцию распределения тока $I(x)$ со спектром волн $\Phi(\xi)$ (функция которой, как показано выше, обладает рядом характерных свойств — интегрируемости в квадрате с весом $|\Gamma(\xi)|^\mu$ и принадлежности к классу целых функций экспоненциального типа $L/2$).

Исходя из проведенной предпосылки, откладывая пока что рассмотрение самой физической задачи, мы будем ставить следующую задачу чисто математической природы.

Обозначим через $W_{\omega}(\omega)$ множество целых функций экспоненциального типа $\leq \omega$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x)|^2 |x|^\omega dx < +\infty \quad (-1 < \omega < 1), \quad (6)$$

и заметим, что класс $W_{\omega}(0)$ совпадает с ранее определенным классом W_{ω} .

Следующие предположения типа теоремы Винера — Пэли устанавливаются методом, развитым в (2).

1°. Класс $W_{L,2}(\omega)$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$\Phi(\xi) = \int_{-L/2}^{L/2} E_1(L\xi; \mu) |x|^{\mu-1} I(x) dx \quad (\mu = 1 + \omega/2), \quad (7)$$

где $I(x)$ — любая функция из $L_2(-L/2; L/2)$. //

$$E_1(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\mu + k) \quad (8)$$

— целая функция типа Миттаг — Леффлера порядка $\rho = 1$ и типа μ .

2°. Если $\Phi(\xi) \in W_{L,2}(\omega)$, то интегральное уравнение (7) имеет единственное решение $I(x) \in L_2(-L/2; L/2)$, притом справедлива формула обращения типа Фурье — Планшереля

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \exp \left[-i \frac{\pi}{2} (\mu - 1) \operatorname{sign} x \right] \int_{-\infty}^0 e^{-i\xi x} |\Phi(\xi)| |\xi|^{\mu-1} d\xi + \right. \\ \left. + \exp \left[i \frac{\pi}{2} (\mu - 1) \operatorname{sign} x \right] \int_0^{+\infty} e^{-i\xi x} |\Phi(\xi)| |\xi|^{\mu-1} d\xi \right\} = \begin{cases} I(x); & |x| < L/2 \\ 0; & |x| > L/2 \end{cases} \quad (9)$$

Вернемся вновь к нашей задаче определения спектра волн $\Phi(\xi)$ излучаемого антенной в среде, содержащей неоднородности. Известно, что в однородной среде плоские волны являются фундаментальными решениями волнового уравнения. Для анализа распространения волн в неоднородной среде усложняется исходное волновое уравне-

ние (скорость распространения зависит от точки пространства), поэтому аппарат интегралов Фурье, пригодный для однородной среды, в случае анализа распространения волн в неоднородной среде, естественно, должен быть заменен на аппарат более общих интегральных преобразований.

В качестве таких преобразований мы предлагаем использовать интегральные преобразования с ядром Миттаг-Леффлера, которые содержат в себе преобразования Фурье в качестве частного случая при значениях параметров $\mu = 1$, $\rho = 1$.

Чтобы обосновать выбор $\Phi(\xi)$ в качестве спектра волн, отметим, что эта функция, как следует из (10), определяет решение волнового уравнения для $I(x)$ с помощью набора плоских волн $\exp(\pm i\xi x)$. Следовательно, $\Phi(\xi)$ спектральная функция.

Отметим, что асимптотическое поведение спектральной функции $\Phi(\xi)$ аналогично поведению решений волнового уравнения, поскольку имеет место асимптотическая формула для ядра интегрального соотношения (7) вида

$$E(i\xi x; \mu) = (i\xi x)^{\mu-1} E_1(i\xi x; \mu) = e^{i\xi x} + \varphi_\mu(\xi; x) (x \neq 0), \quad (10)$$

где

$$\varphi_\mu(\xi; x) = |\xi|^{\mu-1} O(1/|\xi|), \quad \xi \rightarrow \pm \infty (x \neq 0). \quad (11)$$

Следовательно, при условии $\mu \in (1/2, 3/2)$ функция $E_1(i\xi x; \mu)$ асимптотически ведет себя как обычная плоская волна $e^{i\xi x}$, с точностью до слагаемого $\varphi_\mu(\xi; x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ ($x \neq 0$).

Ниже на конкретной физической модели будет установлена справедливость изложенного нами подхода к решению задач изучения антенн.

Приступим теперь к задаче расчета диаграммы направленности антенны под оболочкой методом геометрической оптики. Излучающая система представляет собой бесконечно тонкую ленту шириной L . Оболочка предполагается неоднородной и бесконечно тонкой, нормированный коэффициент прохождения которой $T(\xi)$ по отношению к плоской волне, падающей на оболочку под различными углами, является функцией угла падения θ (рис. 1).

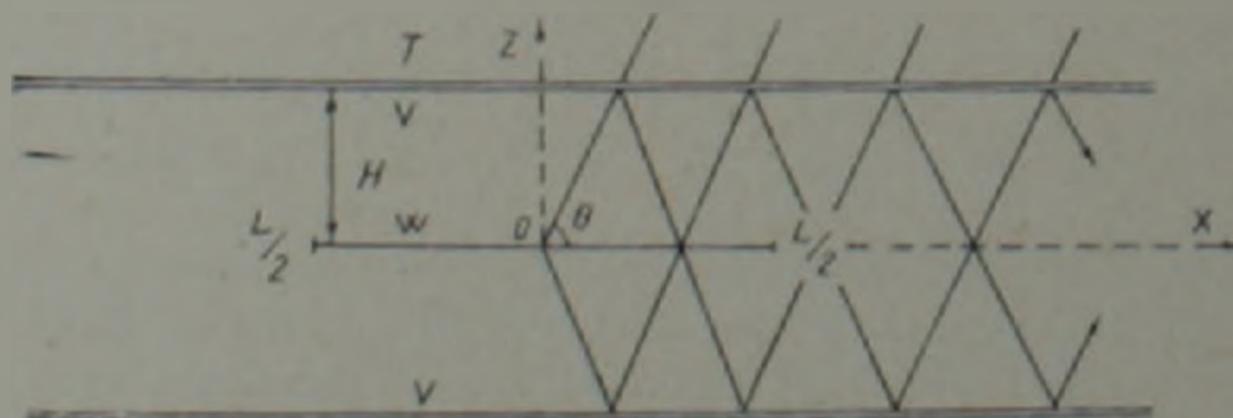


Рис. 1. Излучающая система с оболочкой

$$T(\xi) \approx |\xi|^{\mu-1} / T_0. \quad (12)$$

где $\xi = k \cos \theta$, $k = 2\pi / \lambda$ — волновое число; T_0 — нормирующий коэффициент.

Распределение тока на антенне $I(x)$ может быть в достаточной мере произвольным — равномерным, параболическим и любым другим, описываемым гладкой кривой.

В отличие от задачи, приведенной в монографии (1), где проведен расчет поля точечного источника в однородном плоском слое диэлектрика конечной толщины, в данной статье рассматриваем протяженное распределение источников, притом будем учитывать многократные взаимные отражения между антенной и оболочкой, учитывая также бесконечные отражения, происходящие между двумя внутренними сторонами оболочки.

Итак, пусть коэффициент прохождения $T(\xi) \leq 1$, а связанный с ним коэффициент отражения $V(\xi) = \sqrt{1 - |T(\xi)|^2}$. Коэффициент W отражения от антенны будем считать равным -1 .

Луч, начинающийся в произвольной точке $x \in (-L/2; L/2)$ на антенне, будет иметь

$$N_{\text{отр}} = \left\lfloor \frac{L/2 - x}{2H} \operatorname{tg} \theta \right\rfloor \quad (13)$$

отражений от антенны, где L — длина антенны, H — расстояние от антенны до оболочки, θ — угол между лучом и антенной (рис. 1).

Комплексные амплитуды волн в точках пересечения луча с оболочкой запишутся в виде

$$T e^{-ikx \sin \theta}; T e^{-ikx \sin \theta} (TVW e^{i\bar{\delta}}); \dots; T e^{-ikx \sin \theta} (TVW e^{i\bar{\delta}})^N,$$

где $\bar{\delta} = \frac{4\pi}{\lambda} H \sin \theta = 2k H \sin \theta$ — разность фаз между соседними лучами.

Суперпозиция лучей произвольного отрезка антенны Δ представится в виде

$$T \sum_{k=0}^{N-m+1} (TVW e^{i\bar{\delta}})^k \int_{-L/2+\Delta(m-1)}^{-L/2+\Delta m} e^{-ikx \cos \theta} I(x) dx,$$

где Δ — расстояние между соседними отражениями луча от антенны, равное $\Delta = 2H / \operatorname{tg} \theta$, а $I(x)$ — распределение тока на антенне.

Наконец, суперпозиция лучей по всей антенне выразится формулой

$$\Phi_1(\xi) = T \sum_{m=1}^{N+1} \sum_{k=0}^{N-m+1} (TVW e^{i\bar{\delta}})^k \int_{-L/2+\Delta(m-1)}^{-L/2+\Delta m} e^{-ikx \cos \theta} I(x) dx, \quad (14)$$

Интегрируя и суммируя выражение (14), получим значение функ-

* В принципе, можно не нормировать $T(\xi)$. Это позволит рассматривать диэлектрические оболочки. Тогда используемое соотношение между $V(\xi)$ и $T(\xi)$ теряет смысл и должно быть заменено более общим.

ций диаграммы направленности для различных значений распределения тока на антенне.

Но в настоящей статье мы ставим себе целью, пока что, качественное сравнение результатов численных расчетов, полученных посредством предложенных выше математических и геометрических методов расчета. Поэтому мы решили ограничиться пока только сравнением расчетов по обеим методикам, для простейшего, но принципиально важного случая равномерного распределения тока на антенне, т. е. случая, когда $I(x) \equiv 1$. Положив в (14) $I(x) \equiv 1$, получим следующую формулу для диаграмм направленности, обусловленную отражением от верхней полуплоскости антенны

$$\Phi_{\text{отр. н.}} = \frac{T e^{i \frac{k l}{2} \cos \theta}}{(1-A)^{i k \cos \theta}} (1 - e^{-i k \Delta \cos \theta}) \times \left\{ \frac{1 - e^{-i k (N+1) \Delta \cos \theta}}{1 - e^{-i k \Delta \cos \theta}} - \frac{A |A^{N+1} - e^{-i k \Delta (N+1) \cos \theta}|}{A - e^{-i k \Delta \cos \theta}} \right\}, \quad (15)$$

где $A = TVW e^{i \alpha}$.

Выражение для учета вклада нижней полуплоскости антенны легко получить аналогично

$$\Phi_{\text{отр. н.}} = \frac{T e^{i \frac{k l}{2} \cos \theta_1}}{(1-A_1)^{i k \cos \theta_1}} (1 - e^{-i k \Delta \cos \theta_1}) e^{2i H / \sin \theta_1} \times \left\{ \frac{1 - e^{-i k (N+1) \Delta \cos \theta_1}}{1 - e^{-i k \Delta \cos \theta_1}} - \frac{A_1 |A_1^{N+1} - e^{-i k \Delta (N+1) \cos \theta_1}|}{A_1 - e^{-i k \Delta \cos \theta_1}} \right\}. \quad (16)$$

где $A_1 = VW e^{i \alpha_1}$, $\alpha_1 = 2kH / \sin \theta_1$, а $\theta_1 = -\theta$.

Дальше учитываются отражения в оболочке; для этого выражения (15) и (16) надо умножить на сумму бесконечной геометрической прогрессии $(1 - TV^2 e^{2i \alpha})^{-1}$ и прибавить к значению (15).

В итоге для диаграммы направленности получим

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{\text{отр. н.}} + (\Phi_{\text{отр. н.}} + \Phi_{\text{отр. н.}}) (1 - TV^2 e^{2i \alpha})^{-1}. \quad (17)$$

С помощью последнего выражения, методом численного расчета на ЭВМ, для различных значений нормированного коэффициента прохождения $T(\epsilon) \approx |\epsilon|^{-1} / T_0$ были получены диаграммы направленности, которые сравнивались далее с диаграммами направленности, получаемыми с помощью интегральных преобразований с ядром Миттаг-Леффлера, когда $I(x) \equiv 1$.

При сравнении диаграмм направленности, полученных на основе математической модели по формуле (7) и методом геометрической оптики $\Phi_{\Sigma}(\epsilon) / T(\epsilon)$ по формуле (17) для различных значений коэффи-

интеграла прохождения $T(z) = |E^{-1}| T_0$ и при $T(x) = 1$, отмечено хорошее совпадение результатов (рис. 2).

Так, при $\mu = 1$, что, как мы уже отмечали, соответствует излучению антенны в однородной среде, результаты вычислений по обеим методикам совпадают с высокой точностью. Это обстоятельство использовалось в качестве тест-программы.

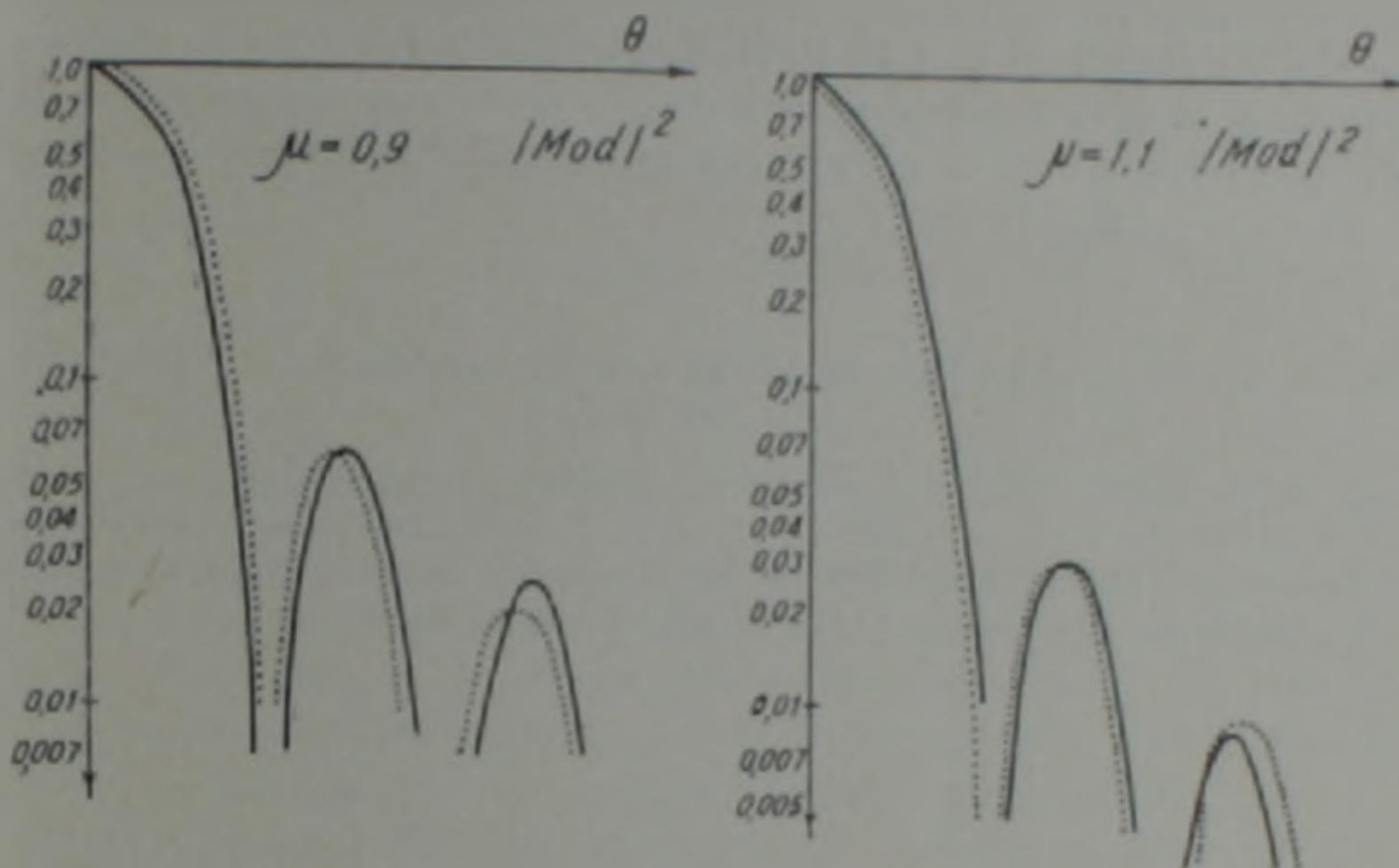


Рис. 2. Сплошная линия—диаграммы направленности, полученные на основе математической модели по формуле (7); точки—диаграммы направленности, полученные методом геометрической оптики по формуле (17)

При значениях $\mu = 0.9$ и $\mu = 1.1$ результаты совпадают с высокой точностью в пределах главного и ближних боковых лепестков диаграммы направленности. Расхождение диаграммы за пределами отмеченной зоны связано с погрешностью геометрического приближения.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод интегральных преобразований с ядром Минтцаг-Леффлера может быть применен для нахождения диаграммы направленности антенных систем, функционирующих под оболочкой. Этот метод может также дать возможность проанализировать искажения диаграммы направленности неоднородным атмосферным слоем, слоем плазмы и некоторых других задач распространения волн через неоднородную среду.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

ՄԿ Մ. ՇՐԲԱՆԱՆ. Օ Ս ԼԻՏՎԵՐՈՎ

Ուղղվածության դիագրամների մի դասի մասին անտեսանելի տեսությունում

Սույն հոդվածում բերվում է անհամասեռություն պարունակող միջավայրում ճառագայթող անտեսանելի մաթեմատիկական մոդելի կառուցումը:

Այս մեթոդով ստացված թվային արդյունքները համեմատված են կոնկրետ ֆիզիկական մոդելային խնդրի լուծումից ստացված արդյունքների հետ: Ֆիզիկական մոդելային խնդրի լուծումը կատարվում է երկրաչափաօպտիկական մեթոդով:

Ստացված արդյունքները վկայում են, որ Ախտազ-Լեֆլերի կորիզով ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը կարող է կիրառվել թաղանթի տակ դորժող անտենային սխեմաների ուղղվածության դիագրամները որոշելու համար: Այդ մեթոդը կարող է նաև հնարավորություն տալ հետազոտել ուղղվածության դիագրամների արագափոխումները մթնոլորտի անհամասեռ շերտով, պլազմայի շերտով և անհամասեռ միջավայրում ալիքների տարածման մի շարք ուրիշ խնդիրներում:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ О. С. Литвинов, Решение некоторых задач теории излучающих систем методом разнальных сечений, канд. дис., МФТИ, М., 1975. ² М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. ³ Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, «Наука», М., 1973.