ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. Едоян

О напряженном состоянии окрестности угловой точки контура с частично соединенным жестким телом в плоской задаче теории упругости для анизотропного тела

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 14/IV 1980)

Исследуется характер напряженного состояния в окрестности угловой точки контура поперечного сечения призматического анизотропного тела, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости. Боковая поверхность тела на одной стороне угловой точки жестко соединена, а с другой стороны свободна. Материал тела обладает прямолинейной анизотропией и в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, совпадающую с поперечным сечением призматического тела.

Примыкающие к угловой точке ветви контура поперечного сечения принимаются прямолинейными. В случае криволинейности этих ветвей они могут быть заменены их касательными в угловой точке.

На одной стороне от угловой точки на контуре вблизи этой точки выполняются условия заделки, а на другой—отсутствия внешней нагрузки. Напряженное состояние тела вызвано нагрузкой, приложенной к нему на некотором удалении от угловой точки.

1. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в угловой точке поперечного сечения, направляя ось z нормально к плоскости сечения, а ось x по направлению касательной к заделанной части контура. Угол между ветвями обозначен через φ_0.

При отсутствии массовых сил в окрестности рассматриваемой точки функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению [1]

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \tag{1.1}$$

где коэффициенты a_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) зависят от постоянных материала и углов между одним главным направлением анизотропии и осью x [1].

Компоненты напряжений определяются по формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{1.2}$$

Напряжения и деформации связаны соотношениями обобщенного закона Гука для плоского напряженного состояния:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\sigma_{xy}; \qquad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\sigma_{xy};$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\sigma_{xy}. \tag{1.3}$$

В случае плоской деформации коэффициенты в (1.1) и (1.3) заменяются соответственно

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}\, a_{j3}}{a_{33}} \qquad (i, j = 1,2,6).$$

Деформации перемещения связаны

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Напряжения и перемещения в окрестности рассматриваемой точки удовлетворяют граничным условиям:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \sigma_{xy} \cos(n, x) \Big|_{\substack{x = r\cos\varphi_0 \\ y = r\sin\varphi_0}} = 0;$$

$$\sigma_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) \Big|_{\substack{x = r\cos\varphi_0 \\ y = r\sin\varphi_0}} = 0; \tag{1.5}$$

$$U|_{y=0} = 0; \qquad V|_{y=0} = 0; \tag{1.6}$$

где n — направление нормали к свободной ветви границы.

Следуя [2] и [3], условия (1.6) заменяются эквивалентными им, с точностью до жесткого перемещения, условиями

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{y=0} = 0; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{y=0} = 0. \tag{1.7}$$

Условия (1.5) и (1.7) представляются в виде:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin\varphi_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos\varphi_0 \Big|_{\substack{x = r\cos\varphi_0 \\ y = r\sin\varphi_0}} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin\varphi_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos\varphi_0 \Big|_{\substack{x = r\cos\varphi_0 \\ y = r\sin\varphi_0}} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + b_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - b_{16} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_{y=0} = 0; \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} - 2b_{16} \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - b_{26} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\Big|_{y=0} = 0,$$

где $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{11}}$; $\qquad (i,j = 1, 2, 6)$.

Частное решение уравнения (1.1) представляется в виде ([4])

$$F(x,\ y) = \sum_{k=1}^{4} A_k (x + \delta_k y)^{\lambda+1}, \tag{1.9}$$

где λ—подлежащий определению параметр, а δ_k—корни уравнения

$$\delta^4 - 2b_{16}\delta^3 + (2b_{12} + b_{66})\delta^2 - 2b_{26}\delta + b_{22} = 0. \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) для анизотропных материалов не имеет действительных корней ([1]).

2. Рассмотрим два случая.

I. Корни уравнения (1.10) простые, комплексно сопряженные

$$\delta_3 = \bar{\delta}_1 = \xi_1 - i\eta_1; \qquad \delta_4 = \bar{\delta}_2 = \xi_2 - i\eta_2. \tag{2.1}$$

Действительные величины ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 определяются коэффициентами b_{ij} соотношениями:

$$b_{16} = \xi_1 + \xi_2, \qquad 2b_{12} + b_{66} = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 + 4\xi_1\xi_2,$$
$$b_{26} = \xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2); \; b_{22} = (\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2). \tag{2.2}$$

Вводя новые постоянные

$$A_1 = \frac{1}{2}(A - iB); \; A_3 = \frac{1}{2}(A + iB); \; A_2 = \frac{1}{2}(C - iD); \tag{2.3}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}(C + iD),$$

функцию напряжений в полярной системе координат можно представить в виде

$$F(r,\varphi) = r^{\lambda+1}[R_1^{\lambda+1}(A\cos\lambda^+\theta_1 + B\sin\lambda^+\theta_1) + R_2^{\lambda+1}(C\cos\lambda^+\theta_2 +$$
$$+ D\sin\lambda^+\theta_2)], \tag{2.4}$$

где приняты обозначения

$$R_1^2 = (\cos\varphi + \xi_1\sin\varphi)^2 + \eta_1^2\sin^2\varphi; \qquad R_2^2 = (\cos\varphi + \xi_2\sin\varphi)^2 + \eta_2^2\sin^2\varphi; \tag{2.5}$$

$$\theta_1 = \arg(\cos\varphi + \xi_1\sin\varphi + i\eta_1\sin\varphi); \quad \theta_2 = \arg(\cos\varphi + \xi_2\sin\varphi + i\eta_2\sin\varphi);$$
$$\lambda^+ = \lambda + 1; \qquad \lambda^- = \lambda - 1.$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.8), для коэффициентов A, B, C, D получаем:

$$AR_{10}^{\lambda}\cos\lambda\theta_{10} + BR_{10}^{\lambda}\sin\lambda\theta_{10} + CR_{20}^{\lambda}\cos\lambda\theta_{20} + DR_{20}^{\lambda}\sin\lambda\theta_{20} = 0;$$
$$AR_{10}^{\lambda}(\xi_1\cos\lambda\theta_{10} - \eta_1\sin\lambda\theta_{10}) + BR_{10}^{\lambda}(\xi_1\sin\lambda\theta_{10} + \eta_1\cos\lambda\theta_{10}) +$$
$$+ CR_{20}^{\lambda}(\xi_2\cos\lambda\theta_{20} - \eta_2\sin\lambda\theta_{20}) + DR_{20}^{\lambda}(\xi_2\sin\lambda\theta_{20} + \eta_2\cos\lambda\theta_{20}) = 0; \tag{2.6}$$
$$A(b_{11} - \xi_1\xi_2 - \eta_1^2) + B\eta_1(\xi_1 - \xi_2) + C(b_{12} - \xi_1\xi_2 - \eta_2^2) + D\eta_2(\xi_2 - \xi_1) = 0;$$
$$A[-b_{12}\xi_1 + \xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2)] + B\eta_1(-b_{12} + \xi_2^2 + \eta_2^2) +$$

$$+ C[-b_{12}\xi_2 + \xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2)] + D\eta_2(-b_{12} + \xi_2^2 + \eta_1^2) = 0,$$

где $\theta_{i0} = \theta_i(\varphi_0, \xi_i, \eta_i)$; $\qquad R_{i0} = R_i(\varphi_0, \xi_i, \eta_i)$; $\qquad (i = 1, 2)$.

Из условия существования нетривиального решения системы (2.6) получаем уравнение относительно параметра λ

$$4\mathrm{ch}(\lambda \ln p)\, \eta_1\eta_2[-b_{12}^2 + (b_{12} - \xi_1\xi_2)(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2) + \xi_1^2\xi_2^2 - \eta_1^2\eta_2^2] +$$
$$+ [-b_{12}^2 - 2b_{12}(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + \eta_1\eta_2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2) - (\xi_1^2\xi_2^2 - \eta_1^2\eta_2^2)]\cdot \tag{2.7}$$
$$\cdot[(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2] \cos(\theta_{10} + \theta_{20})\lambda - [-b_{12}^2 + 2b_{12}(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) -$$
$$- \eta_1\eta_2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) - (\xi_1^2\xi_2^2 - \eta_1^2\eta_2^2)][(\xi_1 - \xi_2)^2 +$$
$$+ (\eta_1 - \eta_2)^2]\cos\lambda(\theta_{10} - \theta_{20}) = 0,$$

где

$$p = \frac{R_{10}}{R_{20}}.$$

Общее решение уравнения (1.1) представляется в виде суммы собственных функций

$$F(x, y) = \sum_{(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{4} A_k (x + \delta_k y)^{\lambda_n + 1}, \tag{2.8}$$

где λ_n — корни трансцендентного уравнения (2.7), имеющие положительные действительные части. Это требование вытекает из конечности удельной энергии деформации около угловой точки ([8]).

В полярной системе координат (2.8) представляется в виде

$$F(r, \varphi) = \sum_{(\lambda_n)} r^{\lambda_n + 1} [(A \cos\lambda_n^+ \theta_1 + B \sin\lambda_n^+ \theta_1) R_1^{\lambda_n + 1} +$$
$$+ (C\cos\lambda_n^+ \theta_2 + D\sin\lambda_n^+ \theta_2) R_2^{\lambda_n + 1}].$$

3. II случай — корни уравнения (1.10) двукратные:

$$\delta = \delta_1 = \delta_3 = \xi + i\eta; \qquad \bar{\delta} = \delta_2 = \delta_4 = \xi - i\eta. \tag{3.1}$$

Частное решение уравнения (1.1) представляется в виде ([3])

$$F(x, y) = M_1(x + \delta y)^{\lambda+1} + M_2(x + \bar{\delta}y)^{\lambda+1} + M_3(x + \bar{\delta}y)(x + \delta y)^{\lambda} +$$
$$+ M_4(x + \delta y)(x + \bar{\delta}y)^{\lambda}, \tag{3.2}$$

где M_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные. Переходя в (3.2) к полярным координатам, получаем

$$F(r, \varphi) = (rR)^{\lambda+1}(L\cos\lambda^+\theta + M\sin\lambda^+\theta + E\cos\lambda^-\theta + H\sin\lambda^-\theta), \tag{3.3}$$

где введены обозначения

$$M_1 = \frac{1}{2}(L - iM); \qquad M_2 = \frac{1}{2}(L + iM);$$
$$\tag{3.4}$$
$$M_3 = \frac{1}{2}(E - iH); \qquad M_4 = \frac{1}{2}(E + iH);$$

$$R^2 = (\cos\varphi + \xi\sin\varphi)^2 + \eta^2\sin^2\varphi; \quad \theta = \arg[\cos\varphi + \xi\sin\varphi + i\eta\sin\varphi]. \quad (3.5)$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно L, M, E, H:

$$L\cos\lambda^+\theta_0 + M\sin\lambda^+\theta_0 + E\cos\lambda^-\theta_0 + H\sin\lambda^-\theta_0 = 0,$$

$$(3.6)$$

$$-L\lambda^+\sin\lambda^+\theta_0 + M\lambda^+\cos\lambda^+\theta_0 - E\lambda^-\sin\lambda^-\theta_0 + H\lambda^-\cos\lambda^-\theta_0 = 0;$$

$$L\lambda^+ - E(4m^* - \lambda^+) = 0,$$

$$M\lambda^+ + H(4m^* + \lambda^-) = 0,$$

где

$$m^* = 1 - \nu^*; \qquad \nu^* = \frac{\xi^2 - b_{12}}{\xi^2 + \eta^2 - b_{12}}; \qquad \theta_0 = \theta(\varphi_0, \xi, \eta);$$

ν^* — приведенный коэффициент Пуассона.

Из условия существования нетривиального решения (3.6) для параметра получается уравнение

$$\lambda^2\sin^2\theta_0 + (3-4\nu^*)\sin^2\lambda\theta_0 - 4(1-\nu^*)^2 = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) идентично уравнению, полученному в случае изотропного клина с углом раствора θ_0 и коэффициентом Пуассона материала ν^* ([7]).

Показано, что условия, допускающие двукратность корней уравнения (1.10) и параметр ν^*, инвариантны относительно угла между одним главным направлением анизотропии с осью x.

Если трансцендентные уравнения (2.7) и (3.7) имеют корни в полосе $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1$, то напряжения в соответствующих случаях при $x \to 0$, $y \to 0$ будут неограниченно возрастать. Порядок особенности напряжений равен $(1 - \mathrm{Re}\,\lambda_1)$, где λ_1—корень уравнений (2.7) или соответственно (3.7), с наименьшей действительной частью в полосе $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1$.

Во втором случае анизотропии, когда уравнение (1.10) имеет двукратные корни, порядок особенности в угловой точке контура с углом раствора φ_0 равен порядку особенностей напряжений, полученному в случае изотропного материала с коэффициентом Пуассона ν^*, при угле θ_0.

Известно, что в решениях смешанной задачи теории упругости изотропного материала особенность напряжений в угловой точке имеется при угле больше $\pi/4$ ([6,7]).

В рассматриваемом нами втором случае анизотропии видно, что значение θ_0 может быть больше или меньше φ_0 при фиксированном φ_0 в зависимости от ξ и η. Как видно из выражения θ_0, при $\xi \to 0$ и $\varphi_0 = \pi/4$ значение θ_0 может быть больше или меньше $\pi/4$ в зависимости от η. Значит, при одном и том же угле φ_0, в зависимости от анизотропии, порядок особенности напряжений может быть выше или ниже, чем особенность напряжений в случае изотропии, и особенности напряжений могут проявиться и в том случае, когда $\varphi_0 < \pi/4$, что не согласуется с утверждением Боджи ([8]).

Отметим, что если $\varphi_0 \to \pi$ или 2π, то $\theta_0 \to \pi$ или 2π соответственно.

Автор выражает благодарность Р. К. Алексаняну за ценные советы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Վ. Հ. ԽԴՈՅԱՆ

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրում մասնակիորեն կոշտ մարմնի հետ ամրակցված եզրի անկյունային կետի շրջակայքի լարվածային վիճակի մասին

Ուսումնասիրված է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի պայմաններում գտնվող անիզոտրոպ մարմնի անկյունային կետի շրջակայքի լարվածային վիճակի բնույթը, երբ կետի շրջակայքը մասնակիորեն ամրակցված է։

Բնութագրիչ հավասարման իրարից տարբեր արմատների դեպքում ստացված է եզակիության կարգը որոշող պարամետրի նկատմամբ տրանսցենդենտ հավասարում։ Համընկնող արմատների դեպքում ցույց է տրված, որ խնդիրը հանգում է «բերված» Պուասոնի գործակցով և «բերված» անկյան բացվածքով իզոտրոպ սեպի գագաթի շրջակայքի լարվածային վիճակի ուսումնասիրմանը։

Պարզվել է, որ անիզոտրոպ մարմնի անկյունային կետի շրջակայքում եզակիությունը կարող է լինել բարձր կամ ցածր, նույն բացվածքի անկյունն ունեցող իզոտրոպի համեմատ, և որ $\pi/4$-ից փոքր անկյուններում կարող է առաջանալ եզակիություն՝ կախված անիզոտրոպիայից, այնինչ հայտնի է, որ իզոտրոպայում $\pi/4$-ից փոքր անկյուններում եզակիությունը բացակայում է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Г. Лехницкий.* Теория упругости анизотропного тела, Гос. изд-во техн. теор. лит., М.—Л., 1950. [2] *К. С. Чобанян*, ДАН АрмССР, т. 32, № 2 (1961). [3] *Лу Цин Хуа* в сб.: Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Мусхелишвили Н. И., Изд-во АН СССР, М., 1961. [4] *Р. К. Алексанян*, ДАН АрмССР, т. 61, № 4 (1975). [5] *Р. К. Алексанян, К. С. Чобанян*, ПМ АН УССР, т. 13, № 6 (1977). [6] *M. L. Williams*, J. Appl. Mech., vol. 19, 526 (1952). [7] *Я. С. Уфлянд.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости, „Наука", Л., 1968. [8] *M. C. Kuo, D. B. Bogy.* Trans ASME, E41, №1 (1974).