

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР
О. М. Сапонджян, П. Г. Кешишян

Изгиб равномерно нагруженной тонкой круглой плиты, заделанной по контуру и жестко соединенной с колоннами круглого поперечного сечения

(Представлено 5/III 1980)

Большее практическое значение имеют решения задач об изгибе плит, жестко или шарнирно соединенных с колоннами (безбалочные перекрытия). Такие конструкции широко применяются в различных областях строительства (¹). В литературе рассмотрены случаи подобного решения задач в основном при точечном опирании плиты на колонны (²).

Следует отметить, что теория изгиба тонких плит не дает возможности выполнения условия полного контакта плиты с колонной. В случае прохождения колонны через отверстие, специально подготовленное в плите, условие контакта можно осуществить вдоль всего контура поперечного сечения колонны (³). Если же плита жестко соединена с колонной по всей площади поперечного сечения последней, то условие контакта между ними можно осуществить только в конечных точках указанной площади (⁴).

В настоящей статье приводится решение задачи изгиба заделанной по контуру круглой плиты, жестко соединенной с двумя одинаковыми колоннами круглого поперечного сечения, центры которых расположены симметрично относительно центра плиты.

Предполагаем, что условия контакта между плитой и колоннами выполняются в центрах поперечного сечения колонн, в которых фиксируется прогиб и угол наклона упругой поверхности плиты. В соответствии с этим закон распределения давления между плитой и колонной принят линейным.

Отметим, что метод решения указанной задачи легко распространить на случай n колонн, симметрично расположенных относительно центра плиты. Для случая четырех колонн в конце статьи приведены численные результаты.

1. Вспомогательная задача. Рассмотрим изгиб плиты

под действием нагрузки, распределенной по площади круга радиуса r_0 (рис. 1) по закону

$$q = q_0 + q_1 x_1, \quad (1.1)$$

где q_0 и q_1 — постоянные.

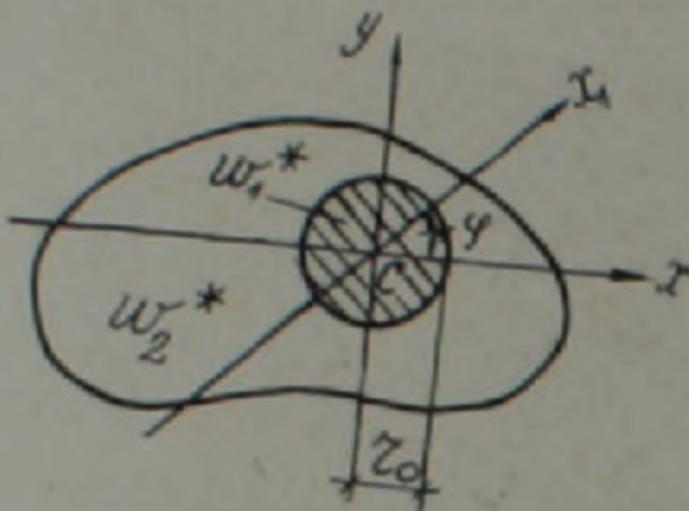


Рис. 1. Плита под действием нагрузки, распределенной по площади круга с центром в начале координат

В системе осей координат x и y выражение (1.1) приводится к виду

$$q = q_0 + q_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi), \quad (1.2)$$

где φ — угол между x_1 и x .

Обозначим прогибы в замкнутой области нагруженного круга и замкнутой ненагруженной области плиты соответственно через w_1^* и w_2^* .

Согласно теории изгиба тонких плит

$$\nabla^4 w_1^* = \frac{q}{D}, \quad \nabla^4 w_2^* = 0 \quad \left(\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right). \quad (1.3)$$

Общее решение этих уравнений представим в виде ⁽²⁾

$$w_1^* = f_1^* + \Phi, \quad w_2^* = f_2^* + \Phi, \quad (1.4)$$

где f_1^* — частное решение первого из (1.3) дифференциального уравнения. Оно определяется известной формулой (например ⁽³⁾)

$$f_1^* = \frac{1}{16D} \iiint \int q(z, \bar{z}) dz^2 d\bar{z}^2, \quad (1.5)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ — комплексные переменные.

В указанных переменных (1.2) примет вид

$$q = q_0 + \frac{1}{2} q_1 (ze^{-i\varphi} + \bar{z}e^{i\varphi}). \quad (1.6)$$

Внося (1.6) в (1.5), находим

$$f_1 = \frac{z\bar{z}^2}{64D} \left[q_0 + \frac{1}{6} q_1 \left(ze^{-i\varphi} + \bar{z}e^{i\varphi} \right) \right]. \quad (1.7)$$

Входящие в (1.4) функции f_2^* и Φ являются бигармоническими:

$$\nabla^4 f_2^* = \nabla^4 \Phi = 0. \quad (1.8)$$

Функция f_2^* определяется согласно (3) с учетом (1.7):

$$f_2^* = \frac{q_0 r_0^2}{16D} \left[\left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2} - z\bar{z} + \frac{5}{4} r_0^2 \right] - \frac{q_1 r_0^2}{64D} \left(r_0^2 \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2} - z\bar{z} + \frac{r_0^4}{3z\bar{z}} + \frac{r_0^2}{2} \right) \left(\bar{z}e^{i\varphi} + ze^{-i\varphi} \right). \quad (1.9)$$

Внеся (1.7) и (1.9) в (1.4), получим общее решение задачи об изгибе плиты под действием нагрузки, распределенной по линейному закону (1.1) по площади круга радиуса r_0 с центром в начале координат. Для дальнейшего применения указанного решения будет необходим перенос начала координат из центра нагруженного круга в новое положение (рис. 2).

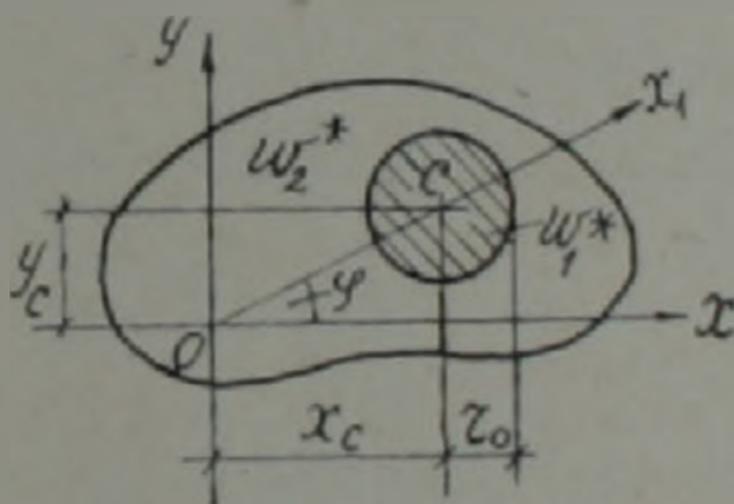


Рис. 2. Плита под действием нагрузки, распределенной по площади круга с центром, смещенным относительно начала координат

Проделав это, приводим решение вспомогательной задачи к окончательному виду

$$w_1^* = f_1 + \Phi, \quad w_2^* = f_2 + \Phi, \quad (1.10)$$

где

$$f_1 = \frac{(z-z_c)^2(\bar{z}-\bar{z}_c)^2}{64D} \left[q_0 + \frac{1}{6} q_1 \left[(z-z_c)e^{-i\varphi} + (\bar{z}-\bar{z}_c)e^{i\varphi} \right] \right], \quad (1.11)$$

$$f_2 = \frac{q_0 r_0^2}{16D} \left[\left| (z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c) + \frac{r_0^2}{2} \right| \ln \frac{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)}{r_0^2} - (z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c) + \frac{5}{4} r_0^2 \right] - \frac{q_1 r_0^2}{64D} \left[r_0^2 \ln \frac{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)}{r_0^2} - (z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c) + \right.$$

$$+ \frac{r_0^4}{3(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)} + \frac{r_0^2}{2} \left| \times \left[(\bar{z}-\bar{z}_c)e^{i\varphi} + (z-z_c)e^{-i\varphi} \right] \right. \quad (1.12)$$

здесь $z_c = x_c + iy_c = ae^{i\varphi}$ ($\bar{z}_c = x_c - iy_c = ae^{-i\varphi}$) — комплексная координата центра нагруженного круга, φ — угол между x_1 и x , при этом ось x_1 проходит через начало координат и центр нагруженного круга.

2. Рассмотрим изгиб равномерно нагруженной круглой плиты, заделанной по контуру и жестко соединенной с двумя колоннами круглого поперечного сечения.

Распределение давления между плитой и колоннами по площади их соприкосновения примем линейным, согласно (1.2).

Для простоты примем, что центры поперечных сечений колонн находятся на оси x и симметрично расположены относительно оси y (рис. 3, а). Введем обозначения: a и $(-a)$ — абсциссы указанных центров, R — радиус плиты, r_0 — радиус кругов, на которых приложены давления колонн, p — интенсивность нагрузки, равномерно распределенной по всей области плиты, w_1 и w_2 — прогибы соответственно в областях правого и левого указанных кругов, w_3 — прогиб в области вне этих кругов.

Представим выражения этих прогибов в виде

$$w_i = f_p + \sum_{k=1}^2 f_{ik} + \Phi \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

где f_p — частное решение от равномерно распределенной нагрузки, равное

$$f_p = \frac{pz^2\bar{z}^2}{64D}$$

а f_{ik} — частное решение для i -той области от реакции k -той колонны. Эти частные решения определяются через частные решения, входящие в выражения (1.10) для прогибов вспомогательной задачи:

$$f_{11} = (f_1)_{r=0}, \quad f_{12} = (f_2)_{r=r_0}, \quad f_{21} = (f_2)_{r=0}; \quad (2.2)$$

$$f_{22} = (f_1)_{r=r_0}, \quad f_{31} = (f_2)_{r=0}, \quad f_{32} = (f_2)_{r=r_0}.$$

Теперь из (2.1) с учетом (1.11), (1.12) и (2.2) получим:

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{pz^2\bar{z}^2}{64D} + \frac{1}{64D} (z-a)^2(\bar{z}-a)^2 \left| q_0 + \frac{1}{6} q_1(z+\bar{z}-2a) \right| + \\ & + \frac{q_0 r_0^2}{16D} \left\{ \left| (z+a)(\bar{z}+a) + \frac{r_0^2}{2} \right| \ln \frac{(z+a)(\bar{z}+a)}{r_0^2} - (z+a)(\bar{z}+a) + \right. \\ & + \left. \frac{5}{4} r_0^2 \right\} - \frac{q_1 r_0^2}{64D} \left| (z+a)(\bar{z}+a) - \frac{r_0^2}{3(z+a)(\bar{z}+a)} - r_0^2 \ln \frac{(z+a)(\bar{z}+a)}{r_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{r_0^2}{2} \right| (z+\bar{z}+2a) + \Phi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & \frac{pz^2\bar{z}^2}{64D} + \frac{q_0 r_0^2}{16D} \left[\left(z\bar{z} + a^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \frac{(z^2 - a^2)(\bar{z}^2 - a^2)}{r_0^4} + \right. \\
& + a(z + \bar{z}) \ln \frac{(z+a)(\bar{z}+a)}{(z-a)(\bar{z}-a)} - 2z\bar{z} - 2a^2 + \frac{5}{2}r_0^2 \left. \right] + \\
& + \frac{q_1 r_0^2}{64D} \left[r_0^2 \ln \frac{(z+a)(\bar{z}+a)}{(z-a)(\bar{z}-a)} - \frac{2a^4(z+\bar{z})}{3(z^2 - a^2)(\bar{z}^2 - a^2)} - \right. \\
& - 2a(z + \bar{z}) \left. \right] + \frac{q_1 a r_0^2}{32D} \left[r_0^2 \ln \frac{(z^2 - a^2)(\bar{z}^2 - a^2)}{r_0^4} + \right. \\
& + \frac{2r_0^4(z\bar{z} + a^2)}{3(z^2 - a^2)(\bar{z}^2 - a^2)} - 2z\bar{z} - 2a^2 + r_0^2 \left. \right] + \Phi. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Исходя из симметричности задачи, значение w_3 здесь и в дальнейшем не приводится.

Переходим к определению бигармонической функции Φ и постоянных q_0 и q_1 . Для этого выразим бигармоническую функцию Φ через две аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$ формулой Гурса

$$\Phi = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \kappa(z) + \overline{\kappa(z)}, \quad (2.5)$$

где функции $\overline{\varphi(z)}$ и $\overline{\kappa(z)}$ являются сопряженными соответственно с функциями $\varphi(z)$ и $\kappa(z)$, полученными из последних заменой i на $(-i)$.

Введем обозначение

$$\psi(z) = \kappa'(z), \quad (2.6)$$

откуда

$$\kappa(z) = \int \psi(z) dz + \frac{c_0}{2}, \quad (2.7)$$

где c_0 — действительная постоянная.

Условия заделки плиты по наружному контуру L выражаются равенствами (3):

$$\frac{\partial w_3}{\partial z} = 0 \text{ на } L;$$

$$w_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{в произвольно фиксированной} \\ \text{на } L \text{ точке.} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Первое из условий (2.8) с учетом (2.5) и (2.6) приводится к виду

$$\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_L, \quad (2.9)$$

где $t = Re^{i\theta}$ — комплексная координата произвольной точки на контуре L , $\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_L$ — контурное значение производного от частного решения.

входящего в формулу (2.4).

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в области плиты (круга) разлагаются в степенные ряды по степеням комплексной переменной z :

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \left(\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right), \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \quad (2.10)$$

Подставляя в (2.9) контурные значения функций (2.10), разложив при этом правую часть (2.9) в степенные ряды и сравнивая коэффициенты при $e^{-k\theta}$, находим коэффициенты рядов функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. В результате функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представляются в виде:

$$\varphi(z) = a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}; \quad (2.11)$$

$$\psi(z) = b_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} b_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (2.12)$$

где

$$a_1 = \frac{r_0^2}{64D} \left[-\frac{pR^2}{r_0^2} + 2q_0 \left(4 \ln \frac{r_0}{R} - 2 \frac{a^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2} \right) + 2q_1 a \left(2 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \right];$$

$$b_1 = \frac{r_0^2}{16D} \left\{ q_0 \frac{a^2}{R^2} \left(2 \frac{a^2}{R^2} + 3 \frac{r_0^2}{R^2} - 4 \right) + q_1 a \frac{r_0^2}{R^2} \left[2 \frac{a^2}{R^2} + \left(\frac{R}{r_0} - \frac{r_0}{R} \right)^2 \right] \right\};$$

$$a_{2n+1} = \frac{r_0^2}{32D} \cdot \frac{a^{2n}}{R^{4n}} \left[2q_0 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{a^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2} \right) - \right.$$

$$\left. - q_1 a \frac{r_0^2}{a^2} \left(\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{a^2}{R^2} + \frac{2n}{3} \cdot \frac{r_0^2}{R^2} - 1 \right) \right], \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$b_{2n-1} = \frac{r_0^2}{16D} \cdot \frac{a^{2n}}{R^{4n-2}} \left\{ q_0 \left[2 \frac{a^2}{R^2} + (2n+1) \frac{r_0^2}{R^2} - \frac{4n}{2n-1} \right] + \right.$$

$$\left. + q_1 a \frac{r_0^2}{a^2} \left[(n+1) \frac{a^2}{R^2} + \frac{n(2n+1)}{3} \cdot \frac{r_0^2}{R^2} - \frac{2n^2}{2n-1} \right] \right\}, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Постоянная c_0 , входящая в (2.7), определяется известной формулой (3)

$$c_0 = -\Pi \left\{ f(t, \bar{t}) + 2 \operatorname{Re} \left[\bar{t} \varphi(t) + \int \psi(z) dz \right] \right\}, \quad (2.13)$$

где Π —символ, обозначающий „постоянное слагаемое“.

Заметим, что согласно (2.12) последнее слагаемое из (2.13) равно нулю, а первые два слагаемых определяются соответственно из контурных значений частного решения, входящего в формулу (2.4) и функции $\varphi(z)$ из (2.11).

Окончательный результат будет

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = & \frac{pR^4}{64D} - \frac{q_0 r_0^2}{8D} \left| (2a^2 + r_0^2) \ln \frac{R}{r_0} - R^2 + \frac{3}{4} r_0^2 \right| - \\ & - q_1 a \frac{r_0^2}{16D} \left(2r_0^2 \ln \frac{R}{r_0} - a^2 + \frac{r_0^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Бигармоническая функция Φ определяется согласно (2.5) с учетом (2.7), (2.11), (2.12) и (2.14). Суммируя полученные при этом ряды и произведя некоторые преобразования, получим в замкнутом виде выражение функции Φ .

Внеся это выражение в (2.3) и (2.4), представим прогибы w_1 и w_2 в следующем виде:

$$w_1 = \frac{pR^4}{32D} \beta^2 (n_0 \Omega_1 + n_1 \Omega_2 + \Omega_3); \quad (2.15)$$

$$w_2 = \frac{pR^4}{32D} \beta^2 (n_0 \Omega_3 + n_1 \Omega_4 + \Omega_5). \quad (2.16)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & |2(\zeta + a)(\bar{\zeta} + a) + \beta^2| \ln \frac{(\zeta + a)(\bar{\zeta} + a)}{(1 + a\zeta)(1 + a\bar{\zeta})} + |2(\zeta - a)(\bar{\zeta} - a) + \\ & + \beta^2| \ln \frac{\beta^2}{(1 - a\zeta)(1 - a\bar{\zeta})} + 2a^2 \beta^2 (1 - \bar{\zeta}) \left(\frac{\zeta^2}{1 - a^2 \zeta^2} + \frac{\bar{\zeta}^2}{1 - a^2 \bar{\zeta}^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2\beta^2} (\zeta - a)^2 (\bar{\zeta} - a)^2 - 2a(\zeta + \bar{\zeta}) + (4a^2 - 2\beta^2 - 2)\zeta \bar{\zeta} - 2a^2 - \frac{\beta^2}{2} + 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \beta^2 \left\{ \left(1 + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2a} \right) \ln \frac{(\zeta + a)(\bar{\zeta} + a)}{(1 + a\zeta)(1 + a\bar{\zeta})} + \left(1 - \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2a} \right) \ln \frac{\beta^2}{(1 - a\zeta)(1 - a\bar{\zeta})} + \right. \\ & + \frac{2}{3} \beta^2 (1 - \bar{\zeta}) \left[\frac{\zeta^2}{(1 - a^2 \zeta^2)^2} + \frac{\bar{\zeta}^2}{(1 - a^2 \bar{\zeta}^2)^2} \right] - \left[(1 - a^2)(1 - \bar{\zeta}) - \frac{\beta^2}{3} \right] \times \\ & \times \left(\frac{\zeta^2}{1 - a^2 \zeta^2} + \frac{\bar{\zeta}^2}{1 - a^2 \bar{\zeta}^2} \right) + \left(1 + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2a} \right) \left[\frac{\beta^2}{3(\zeta + a)(\bar{\zeta} + a)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\beta^2} (\zeta + a)(\bar{\zeta} + a) + \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{6\beta^4} \left(1 - \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2a} \right) (\zeta - a)^2 (\bar{\zeta} - a)^2 + \\ & \left. + \frac{1}{\beta^2} (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 + 4\zeta \bar{\zeta}) + 2 \frac{a^2}{\beta^2} - 1 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & |2(\zeta + a)(\bar{\zeta} + a) + \beta^2| \ln \frac{(\zeta + a)(\bar{\zeta} + a)}{(1 + a\zeta)(1 + a\bar{\zeta})} + |2(\zeta - a)(\bar{\zeta} - a) + \\ & + \beta^2| \ln \frac{(\zeta - a)(\bar{\zeta} - a)}{(1 - a\zeta)(1 - a\bar{\zeta})} + 2a^2 \beta^2 (1 - \bar{\zeta}) \left(\frac{\zeta^2}{1 - a^2 \zeta^2} + \frac{\bar{\zeta}^2}{1 - a^2 \bar{\zeta}^2} \right) + \\ & + (4 - 4a^2 + 2\beta^2)(1 - \bar{\zeta}); \end{aligned}$$

$$\Omega_4 = \beta^2 \left\{ \left(1 + \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2x} \right) \ln \frac{(\zeta + x)(\bar{\zeta} + x)}{(1 + x\zeta)(1 + x\bar{\zeta})} + \left(1 - \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2x} \right) \ln \frac{(\zeta - x)(\bar{\zeta} - x)}{(1 - x\zeta)(1 - x\bar{\zeta})} - \right. \\ \left. - \frac{\beta^2}{3} \left(\frac{1}{\zeta^2 - x^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2 - x^2} \right) + \frac{2}{3} \beta^2 (1 - \zeta\bar{\zeta}) \left[\frac{\zeta^2}{(1 - x^2\zeta^2)^2} + \frac{\bar{\zeta}^2}{(1 - x^2\bar{\zeta}^2)^2} \right] - \right. \\ \left. - \left[(1 - x^2)(1 - \zeta\bar{\zeta}) - \frac{\beta^2}{3} \left(\frac{\zeta^2}{1 - x^2\zeta^2} + \frac{\bar{\zeta}^2}{1 - x^2\bar{\zeta}^2} \right) \right] \right\}, \\ \Omega_5 = \frac{1}{2\beta^2} (1 - \zeta\bar{\zeta})^2,$$

где

$$\zeta = \frac{z}{R}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{R}, \quad x = \frac{a}{R}, \quad \beta = \frac{r_0}{R}$$

Неизвестные постоянные n_0 и n_1 , входящие в (2.15) и (2.16), выражены через q_0 , q_1 и p следующим образом:

$$n_0 = q_0 \frac{1}{p}; \quad n_1 = q_1 \frac{a}{p}.$$

Заметим, что представление прогибов (2.15) и (2.16) в замкнутом виде не является неожиданным, ибо, как показано Мичеллом (6), прогиб заделанной по контуру круглой плиты под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке, получается в замкнутом виде.

Перейдем теперь к определению величин n_0 и n_1 . Они определяются из условий контакта плиты с колонной. Эти условия, как указывалось выше, можно осуществить в конечных числах точек соприкасания колонны с плитой, но поскольку реакция колонн принята в виде (1.1), то тем самым предопределены два условия контакта. Эти условия относим к центральной точке поперечного сечения колонны. Пренебрегая для простоты деформациями колонны, вследствие их большей жесткости по сравнению с плитой, условия для определения n_0 и n_1 выразим равенствами:

$$w_1 = 0; \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \text{ при } x = a. \quad (2.17)$$

Условия (2.17) в развернутом виде сводятся к системе из следующих двух уравнений, откуда и определяются n_0 и n_1 :

$$\left[16x^2 \ln \frac{2x}{1+x^2} + 2\beta^2 \ln \frac{2x\beta}{1-x^4} + \frac{4x^4\beta^2}{1+x^2} + 4x^4 - 2x^2\beta^2 - 8x^2 - \frac{\beta^2}{2} \right] n_0 + \\ + \beta^2 \left[4 \ln \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^2\beta^2}{3(1-x^4)(1+x^2)} - \frac{2x^2(1-x^2)}{1+x^2} - \frac{2x^2\beta^2}{3(1-x^4)} - \frac{\beta^2}{6x^2} \right] n_1 + \\ + \frac{1}{2\beta^2} (1-x^2)^2 = 0; \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
 & \left| 8 \ln \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^2\beta^2}{(1-x^4)(1+x^2)} + \frac{2x^2\beta^2(1-2x^2)}{1-x^4} - \frac{8x^2}{1+x^2} + 4x^2 - 2\beta^2 + \right. \\
 & + \frac{\beta^2}{2x^2} \left| n_0 + \beta^2 \left[\frac{1}{x^2} \ln \frac{2x(1-x^2)}{\beta(1+x^2)} + \frac{2\beta^2}{3(1-x^4)^2} + \frac{4\beta^2}{3(1-x^4)(1+x^2)^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{2(1-x^2)}{1-x^2} - \frac{\beta^2}{24x^4} + \frac{5}{4x^2} \right] n_1 - \frac{1}{\beta^2} (1-x^2) = 0. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Заметим, что если не принять во внимание второе условие (2.17), то это может привести к неточностям при определении перемещений и внутренних усилий плиты. Эти неточности тем больше, чем дальше отстоит колонна от центра плиты.

Пример. Случай двух колонн. Примем $x = 0.3$, $\beta = 0.1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$. Прогибы вычисляются по (2.15) и (2.16), а n_0 и n_1 — по (2.18). Результаты вычислений приводятся в виде эпюры (рис. 3, а). Изгибающие M_x и M_y моменты соответственно по осям x и y определяются по известным формулам. Эпюра их показана на рис. 3, б.

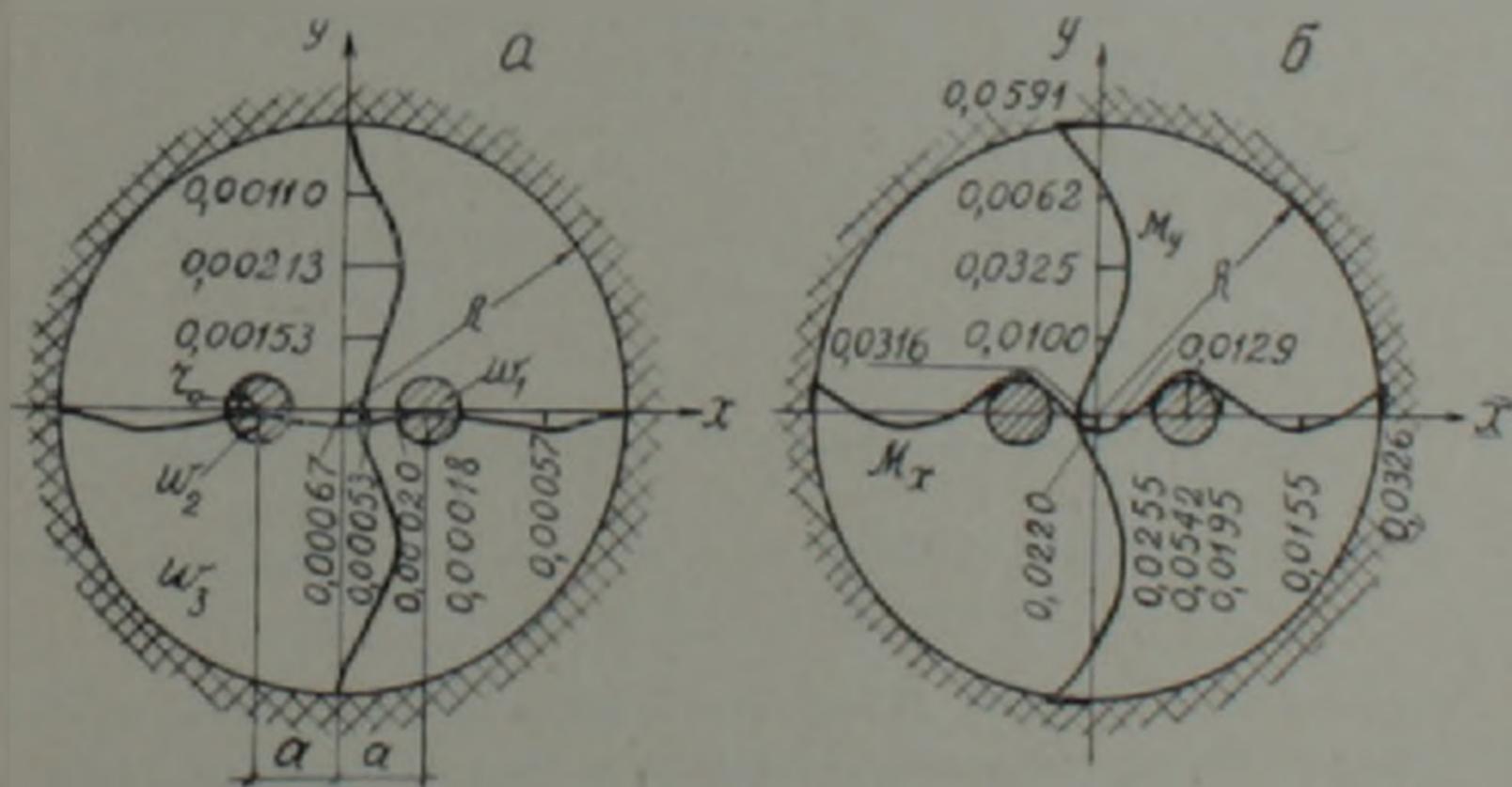


Рис. 3. а — значения прогибов (в долях от $\frac{pR^4}{D}$), б — значения моментов (в долях от pR^2)

Для случая четырех колонн при данных примера приводятся

эпюры прогибов (рис. 4, а) и изгибающих M_x моментов по оси x (рис. 4, б).

Для оценки влияния второго условия (2.17) на величины прогибов и изгибающих моментов M_x плиты приведем разности в процен-

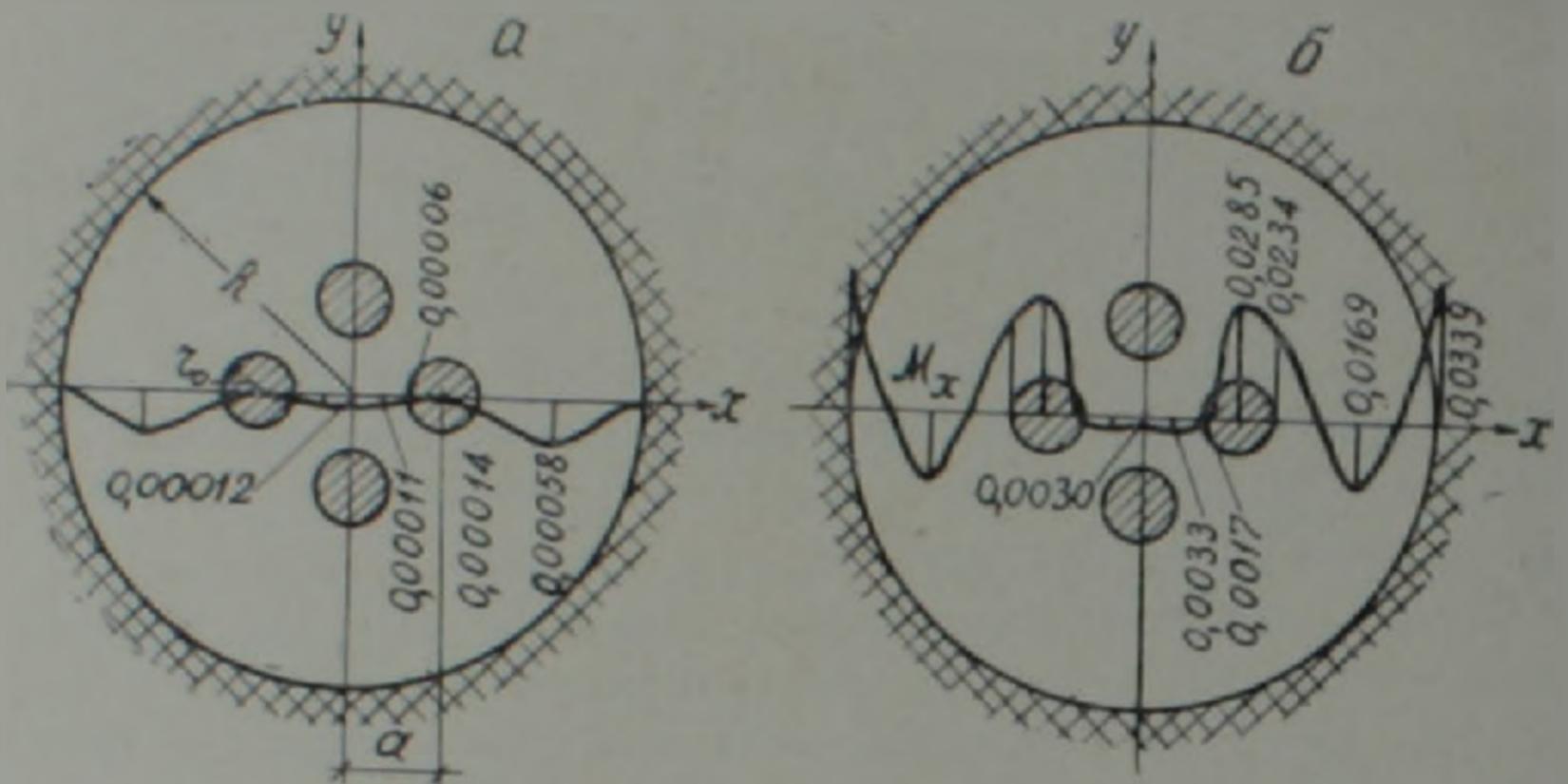


Рис. 4. а — значения прогибов (в долях от $\frac{pR^4}{D}$); б — значения моментов (в долях от pR^2)

тах значений указанных величины для характерных точек примера вычисленных с учетом и без учета влияния упомянутого условия. Эти значения составляют соответственно 14 и 28%.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քղրակից-տեղամ Ո. ԻՄ ՍԱԳՈՆՉՅԱՆ, Գ. Գ. ՎԻՇՆԻՇՅԱՆ

Կլոր լայնական հատույթով սյուներին կոշտ միացած և եզրագծով ամրակցված բարակ կլոր սալի ծոուժը

Աշխատանքում որոշված են եզրագծով ամրակցված և հավասարաչափ բևոնավորված բարակ կլոր սալի ճկվածքներն ու ծոող մոմենտները, երբ սալը կոշտ միացված է երկու կլոր և միևնույն լայնական հատույթով սյուներին, որոնք համաչափ են դասավորված սալի կենտրոնի նկատմամբ:

Անթադրվում է, որ սալի և սյուներից յուրաքանչյուրի կոնտակտի պայմանը տեղի է ունենում դրանց հպման մակերևսի կենտրոնում, որում ֆիքսվում են սալի ճկվածքը և առածգական մակերևույթի թեթուքյան անկյունը: Հաստորի էլ սալի և սյուների միջև առաջացած ճնշումների բաշխման օրենքը ընդունված է գծային:

նկատենք, որ դրված խնդրի ուսումնասիրության մեթոդը կարելի է կիրառել նաև այն դեպքում, երբ նույն սալը կոշտ միացած է իր կենտրոնի նկատմամբ համաչափ դասավորված վերջավոր թվով սյուների:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱՇԻՆՈՒՄՆԵՐ

1 В. Н. Байков, Э. Е. Сигалов, Железобетонные конструкции, Стройиздат, М., 1978. 2 Л. С. Лейбензон, Сборник трудов, т. I, Изд-во АН СССР, М., 1951. 3 С. А. Гавригорин, Бесконечная пластинка на опорах, расположенных в прямоугольном порядке. Сборник по теории сооружений, изд-во КУБУЧ, Л., 1932. 4 А. С. Космодамианский, Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 24—31 октября 1962, Изд-во АН Армянской ССР, Ереван, 1964. 5 О. М. Саломджян, Загиб тонких упругих плит, изд-во «Айастан», Ереван, 1975. 6 J. H. Michell, Proc. Math. Soc., London, vol. 34, p. 223 (1902).