ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

И. А. Карапетян

О раскраске дуговых графов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 15/IV 1980)

Граф пересечения семейства дуг окружности называется дуговым. Дуговые графы впервые были рассмотрены в ([1]). Таккером ([2]) была приведена характеризация дуговых графов при помощи их матриц смежности, в ([3]) дан алгоритм полиномиальной сложности их распознавания. Алгоритмы полиномиальной сложности нахождения наибольшей клики, минимального покрытия кликами и наибольшего внутренне устойчивого множества дуговых графов приведены в ([4]). Задача минимальной раскраски дуговых графов NP—полна ([5]). В настоящей работе доказана гипотеза Таккера ([6]): хроматическое число любого конечного семейства дуг F окружности не превосходит $\left[\frac{3}{2}\varphi(F)\right]$*, где $\varphi(F)$—наибольшее число попарно-пересекающихся дуг этого семейства.

Мы будем рассматривать конечные семейства дуг $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ окружности L. Под дугой $f=[a, b]$ понимаем дугу, исходящую из точки a и продолжающуюся до b по направлению часовой стрелки. a называется левым концом, а b—правым концом дуги f. Не нарушая общности, можно предположить, что все дуги замкнуты (содержат оба конца) и ни одна из дуг не совпадает с окружностью. Хроматическим числом $\gamma(F)$ семейства F называется наименьшее число цветов, которыми можно окрасить все дуги семейства F так, чтобы пересекающиеся дуги имели разные цвета. В качестве цветов мы будем использовать начальный отрезок натурального ряда. И наконец, обозначим через $d(x)$ (где $x\in L$) число всех дуг семейства F, содержащих точку x. Пусть $R(F)=\max\limits_{x\in L} d(x)$. Очевидно, что $R(F)\leq\varphi(F)\leq \leq 2R(F)-1$.

Рассмотрим следующий алгоритм раскраски семейства дуг окружности. Пусть задано семейство дуг $F=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Далее

* $[a]$—наибольшее целое число, не превосходящее a.

всегда будем предполагать, что дуги $f_1=[a_1, b_1]$, $f_2=[a_2, b_2]$, ..., $f_{R(F)}=[a_{R(F)}, b_{R(F)}]$ имеют общую точку и $b_i\in[p, b_j]$, если $i<j$, $i, j\in\overline{1, R(F)}$, где p некоторая точка, принадлежащая всем дугам $f_1, f_2, ..., f_{R(F)}$. Скажем, что точка a находится левее точки b, если $a\in[p, b]$.

Первый этап алгоритма. Из семейства дуг $F_1=F\setminus\{f_1, f_2, ..., f_R\}$ выбираются множества $A_1, A_2, ..., A_{[\frac{1}{2}R]}$ следующим образом. Если $A_1, A_2, ..., A_l$, $l<\left[\frac{1}{2}R\right]$ уже выбраны, то A_{l+1} будет выбираться так. Пусть f_1^{l+1} является той дугой семейства $F_1\setminus\left(\bigcup\limits_{k=1}^{l} A_k\right)$, левый конец которой является самым левым (всегда, если таких дуг несколько, выбирается любая из них). Если $f_1^{l+1}, f_2^{l+1}, ..., f_j^{l+1}$ уже выбраны, то в качестве f_{j+1}^{l+1} будет выбрана та дуга семейства $F_1\setminus\left[\left(\bigcup\limits_{k=1}^{l} A_k\right)\cup\{f_1^{l+1}, f_2^{l+1}, ..., f_j^{l+1}\}\right]$, которая не пересекается ни с одной из дуг $f_1^{l+1}, f_2^{l+1}, ..., f_j^{l+1}$ и левый конец которой является самым близким к правому концу дуги f_j^{l+1}. Этот процесс продолжается до тех пор, пока это возможно. Предположим, что в конце процесса были выбраны дуги $f_1^{l+1}, f_2^{l+1}, ..., f_m^{l+1}$. Обозначим через A_{l+1} множество $\{f_1^{l+1}, f_2^{l+1}, ..., f_m^{l+1}\}$. Очевидно, что для любого $l\in\overline{1, \left[\frac{1}{2}R\right]}$ дуги множества A_l не пересекаются. Дугам множества A_l присвоим цвет $R+l$.

Второй этап алгоритма. Из семейства дуг $F_2=F\setminus\left(\bigcup\limits_{l=1}^{[\frac{1}{2}R]} A_l\right)$ выбирают множества $B_R, B_{R-1}, ..., B_1$ следующим образом. Если $B_R, B_{R-1}, ..., B_l$, $l>1$ уже выбраны, то B_{l-1} будет выбираться так. Пусть дуга $f_{l-1,1}=f_{l-1}\in B_{l-1}$. Если $f_{l-1,1}, ..., f_{l-1,s}\in B_{l-1}$, то пусть $f_{l-1,s+1}$ является той дугой семейства $F_2\setminus\left[\left(\bigcup\limits_{j=l}^{R} B_j\right)\cup\{f_{l-1,1}, ..., f_{l-1,s}\}\right]$, которая не пересекается ни с одной из дуг $f_{l-1,1}, ..., f_{l-1,s}$ и правый конец которой является самым близким к левому концу дуги $f_{l-1,s}$. Предполагается, что $f_{l-1,s+1}\in B_{l-1}$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока это возможно. Из выбора B_l, $l\in\overline{1, R}$ видно, что дуги множества B_l попарно не пересекаются. Дуги множества B_l окрасим в цвет l.

Теорема. *Для любого семейства дуг F имеет место* $\gamma(F)\leq\left[\frac{3}{2}\varphi(F)\right]$.

Для доказательства теоремы докажем две леммы. Пусть над семейством $F=\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ применен описанный алгоритм.

Лемма 1. *Для любого $f\in F_2\setminus\{f_1, f_2, ..., f_R\}$ существуют дуги*

$f_1 \in A_1, f_2 \in A_2, \ldots, f_{[\frac{1}{2}R]} \in A_{[\frac{1}{2}R]}$, *содержащие левый конец дуги* f.

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из выбора множести $A_1, A_2, \ldots, A_{[\frac{1}{2}R]}$.

Лемма 2. *Если* $f = [a, b]$ *произвольная дуга семейства* $F \setminus \left[\left(\bigcup_{i=1}^{R} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{[\frac{1}{2}R]} A_j\right)\right]$, $a \in [p, b_l]$ и $a \notin [p, b_{l-1}]$, *то левый конец каждой дуги семейства* $\left(\bigcup_{i=1}^{R} B_i\right) \setminus \{f_1, \ldots, f_R\}$ *находится левее правого конца дуги* $f = [a, b]$.

Доказательство леммы 2. Поскольку $a \in [p, b_R], \ldots, a \in [p, b_l]$ и $a \notin [p, b_{l-1}], \ldots, a \notin [p, b_1]$, то по лемме 1 $l - 1 > \left[\frac{1}{2} R\right]$. Следовательно, $l > R - \left[\frac{1}{2} R\right]$. Для удобства обозначим $R - l + 1$ через m и пусть $l - 1 = \left[\frac{1}{2} R\right] + k$, где $k > 0$. Ясно, что $m + k = R - \left[\frac{1}{2} R\right]$.

Покажем, что левый конец любой дуги семейства $\left(\bigcup_{i=1}^{R} B_i\right) \setminus \{f_1, \ldots, f_R\}$ находится левее правого конца дуги $f = [a, b]$. Допустим, что это не так. Тогда существуют дуги этого семейства, левые концы которых находятся правее правого конца дуги $f = [a, b]$. Пусть $f' = [a', b']$ одна из этих дуг, левый конец которой является самым близким к правому концу дуги $f = [a, b]$. Поскольку $a \notin [p, b_i]$, то по выбору B_i, $1 \leq i \leq \left[\frac{1}{2} R\right] + k$ существует $f_i \in B_i$, содержащая правый конец дуги $f = [a, b]$.

Обозначим через B семейство $\left\{f_i / a' \in f_i \text{ и } 1 \leq i \leq \left[\frac{1}{2} R\right] + k\right\}$.

Исходя из леммы 1 нетрудно доказать, что $|B| \leq \left[\frac{1}{2} R\right]$. Предположим, что $|B| = \left[\frac{1}{2} R\right] - k_1$, $k_1 \geq 0$. Покажем, что $k_1 < m$. Действительно, это так, иначе та дуга семейства $B' = [\{f_1, f_2, \ldots, f_{[\frac{1}{2}R]+k}\} \setminus B] \cup \{f\}$, левый конец которой является самым правым, левым концом пересекалась бы со всеми дугами семейства B' и согласно лемме 1 еще с $\left[\frac{1}{2} R\right]$ дугами, т. е. эта точка принадлежала бы по крайней мере $k + k_1 + 1 + \left[\frac{1}{2} R\right] \geq k + m + 1 + \left[\frac{1}{2} R\right] = R + 1$ дугам, что невозможно.

Пусть дуга $f' = [a', b']$ окрашена в цвет j. Обозначим $I = \{ i / i \geq l, i \neq j$, существует $f_{i, a_i} \in B_i$ и $a' \in f_{i, a_i}\}$ и $J = \{l, \ldots, R-1, R\} \setminus I$. Исходя из леммы 1 легко доказать, что $|I| \leq k_1$. Следовательно, $|J| \geq m - k_1$.

Рассмотрим следующие два возможных случая.

а) Для каждого $i \in J$ существует дуга f_{i,r_i}, содержащая правый конец дуги $f = [a, b]$. Так как все дуги семейства $B'' = \{f_{i,r_i} / i \in J\} \cup B'$ содержат точку b, то та дуга семейства $B'' \setminus \{f_i / i \in J\}$, левый конец которой является самым правым, левым концом пересеклась бы со всеми дугами B'' и по лемме 1 еще с $\left|\frac{1}{2} R\right|$ дугами, т. е. по крайней мере с $|B''| + \left|\frac{1}{2} R\right| \geq m - k_1 + k + k_1 + 1 + \left|\frac{1}{2} R\right| = R + 1$ дугами, что противоречит определению R.

б) Существует $i_0 \in J$ такое, что ни одна дуга множества B_{i_0} не содержит правый конец дуги $f = [a, b]$. Можно считать, что i_0 — наименьшее среди таких чисел. Рассмотрим множества $J' = \{i / i \in J, i < i_0\}$. Пусть $J' = \{i_1, i_2, \ldots, i_u\}$. Тогда существуют дуги $f'_{i_1} \in B_{i_1}, f'_{i_2} \in B_{i_2}, \ldots, f'_{i_u} \in B_{i_u}$, содержащие точку b. Так как $b_{i_j} \in [p, b_{i_0}]$, $j \in \overline{1, u}$, то все дуги $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_u}$ принадлежат семейству $\left(\bigcup_{j=1}^{u} B_{i_j}\right) \setminus \{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_u}\}$. Пусть $f'' = [a'', b'']$ — та дуга семейства $B' \cup \{f'_{i_1}, f'_{i_2}, \ldots, f'_{i_u}\}$, левый конец которой является самым правым. Тогда по выбору $B_{i_u}, \ldots, B_{i_2}, B_{i_1}$ и дуги $f' = [a', b']$, точка a'' будет принадлежать всем дугам семейства $B' \cup \{f'_{i_1}, f'_{i_2}, \ldots f'_{i_u}\} \cup \{f_{i_0}, f_{i_0+1}, \ldots, f_k\}$ и по лемме 1 еще $\left|\frac{1}{2} R\right|$ дугам, т. е. $k + k_1 + 1 + u + R - i_0 + 1 + \left|\frac{1}{2} R\right|$ дугам. Поскольку $|J| \geq m - k_1$, то $u + R - i_0 + 1 \geq m - k_1$. Следовательно $k + k_1 + 1 + u + R - i_0 + 1 + \left|\frac{1}{2} R\right| \geq R + 1$, что невозможно. Все возможные случаи исчерпаны. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Предположим, что $R(F) = \varphi(F)$ и пусть над семейством $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ применен описанный алгоритм. Если $F_3 = F \setminus \left[\left(\bigcup_{i=1}^{v} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\left|\frac{1}{2}R\right|} A_j\right)\right] = \varnothing$, т. е. все дуги семейства F окрашены, то, очевидно, $\gamma(F) \leq \left|\frac{3}{2} R(F)\right| = \left|\frac{3}{2} \varphi(F)\right|$. Допустим $F_3 \neq \varnothing$ и пусть $f = [a, b]$ — произвольная дуга семейства F_3. Существует $l_0 \in \overline{1, R}$ такое, что $a \in [p, b_{l_0}]$. В противном случае по выбору $B_R, B_{R-1}, \ldots, B_1$ для любого $i \in \overline{1, R}$ существовала бы дуга $f_{i,i_j} \in B_i$, содержащая правый конец дуги $f = [a, b]$, т. е. точка b принадлежала бы по крайней мере $R + 1$ дугам, что невозможно. Пусть $a \in [p, b_R], \ldots, a \in [p, b_l]$ и $a \notin [p, b_{l-1}], \ldots, a \notin [p, b_1]$. Из леммы 1 следует, что $l - 1 > \left|\frac{1}{2} R\right|$. Так как $a \notin [p, b_i]$, $1 \leq i \leq l - 1$, то по выбору $B_{l-1}, \dots, B_2, B_1$ существуют дуги $f_1\in B_1, f_2\in B_2, \dots, f_{l-1}\in B_{l-1}$, содержащие правый конец дуги $f=[a, b]$.

Построим семейства $H_{l-1}, H_l, \dots, H_R$ следующим образом. Пусть $H_{l-1}=\{f_1, f_2, \dots, f_{l-1}\}\cup\{f\}$. Если $H_{l-1}, \dots, H_i$, $l-1\le i<R$, уже построены, то $H_{i+1}=H_i\cup\{f_i\}$, если f_i пересекается со всеми дугами H_i и $H_{i+1}=H_i\cup\{f_{i,2}\}$ в противном случае. Покажем, что все дуги семейства H_i попарно пересекаются, где $l-1\le i\le R$. Допустим, что это не так, и пусть m — наименьшее число такое, что не все дуги семейства H_m попарно пересекаются. Ясно, что $m>l-1$ и $H_m=H_{m-1}\cup\{f_{m,2}\}$. По выбору числа m все дуги семейства H_{m-1} попарно пересекаются. Следовательно, существует дуга $f'\in H_{m-1}$, не пересекающаяся с дугой $f_{m,2}$. Покажем, что $f'\in H_{m-1}\cap\{f_l, \dots, f_{m-1}\}$. Для этого достаточно показать, что дуги семейства $H=H_m\cap\{f_{l,2}, \dots, f_{m,2}\}$ содержат правый конец дуги $f=[a, b]$. Пусть $H=\{f_{l_1,2}, f_{l_2,2}, \dots, f_{l_k,2}\}$. Предположим, что дуги $f_{l_1,2}, \dots, f_{l_j,2}$, $j<k$ содержат точку b, покажем, что дуга $f_{l_{j+1},2}$ тоже содержит точку b. Поскольку $f_{l_{j+1},2}\in H_m$, то $H_{l_{j+1}}=H_{l_{j+1}-1}\cup\{f_{l_{j+1},2}\}$. Следовательно, существует дуга $f''\in H_{l-1}\cup\{f_{l_1,2}, \dots, f_{l_j,2}\}$, не пересекающаяся с дугой $f_{l_{j+1}}$. По выбору множества $B_{l_{j+1}}$ правый конец дуги f'' не находится правее правого конца дуги $f_{l_{j+1},2}$. И по лемме 2 левый конец дуги $f_{l_{j+1},2}$ находится левее правого конца дуги $f=[a, b]$. Так как $b\in f''$, то $b\in f_{l_{j+1},2}$. Этим доказано, что дуги семейства H содержат точку b. Следовательно, $f'\in H_{m-1}\cap\{f_l, \dots, f_{m-1}\}$. С другой стороны, поскольку $H_m=H_{m-1}\cup\{f_{m,2}\}$, то существует дуга $f^0\in H_{m-1}\setminus\{f_1, f_2, \dots, f_{m-1}\}$, не пересекающаяся с дугой f_m. По выбору B_m правый конец дуги f^0 не находится правее правого конца $f_{m,2}$. Так как правый конец дуги f' принадлежит дуге f_m, то дуга f^0 не пересекается с дугой f'. Это невозможно, поскольку $f^0, f'\in H_{m-1}$. Следовательно, для любого i, $l-1\le i\le R$, дуги семейства H_i попарно пересекаются. Очевидно, $|H_R|=R+1$, что противоречит предположению $R(F)=\varphi(F)$. Значит, $F_2=\varnothing$, т. е. все дуги окрашены.

Если $R(F)<\varphi(F)$, то можно добавить к семейству F дуги $f^1, f^2, \dots, f^{\varphi-R}$ так, чтобы для семейства $F'=F\cup\{f^1, f^2, \dots, f^{\varphi-R}\}$ имело место $R(F')=\varphi(F')=\varphi(F)$. Согласно только что доказанному $\gamma(F')\le \left[\frac{3}{2}R(F')\right]=\left[\frac{3}{2}\varphi(F')\right]=\left[\frac{3}{2}\varphi(F)\right]$. Так как $\gamma(F)\le\gamma(F')$, то $\gamma(F)\le\left[\frac{3}{2}\varphi(F)\right]$, что полностью завершает доказательство теоремы.

Следствие ([6]). *Если семейство дуг F не содержит три попарно пересекающиеся дуги, покрывающие все точки окружности, то* $\gamma(F)\le\frac{3}{2}R(F)$.

Заметим, что оценка, приведенная в теореме, точная.

В заключение приношу благодарность С. Е. Маркосяну за внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Աղեղային գրաֆների ներկման մասին

Շրջանագծի աղեղների ընտանիքի հատումների գրաֆը կոչվում է աղեղային։ Աղեղային գրաֆները առաջին անգամ դիտարկվել են ([1])-ում։ Կցության մատրիցների միջոցով աղեղային գրաֆների բնութագրումը տրված է ([2])-ում։ ([3, 4])-ում բերված են աղեղային գրաֆների ճանաչման, մեծագույն կլիկա, կլիկաներով փոքրագույն ծածկույթ և մեծագույն ներքին կայուն բազմություն գտնելու բազմանդամային բարդությամբ ալգորիթմներ։ ([5])-ում ապացուցված է աղեղային գրաֆների մինիմալ ներկման խնդրի NP-լրիվությունը։ Ներկա աշխատանքում ապացուցված է Տակկերի հիպոթեզը, շրջանագծի յուրաքանչյուր F վերջավոր աղեղների ընտանիքի քրոմատիկ թիվը չի գերազանցում $\left\lfloor \frac{3}{2}\omega(F) \right\rfloor$-ին, որտեղ $\omega(F)$-ը այդ ընտանիքի աղեղային գրաֆի մեծագույն կլիկայի գագաթների քանակն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee*, Combinatorial Geometry in the plane, New York, 1964. [2] *A. Tucker*, Pacific J. Math., vol. 38 (1971). [3] *A. Tucker*, Lect. Notes Math. vol. 642, 1978. [4] *F. Gavril*, Networks, vol. 4, N 4, (1974). [5] *M. R. Garey, D. R. Johnson*, Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness, 1980. [6] *A. Tucker*, SIAM J. Appl. Math. vol. 29, N 3 (1975).