ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

П. Т. Хостикян

# О явных выражениях для распределения времени ожидания в двух приоритетных системах $\bar{M}_r|G|1|\infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 9/IV 1980)

1°. Хотя к настоящему времени приоритетные системы типа $\bar{M}_r|G|1|\infty$ достаточно полно изучены, но явные выражения для функций распределения (ф. р.) основных характеристик получены лишь для периодов занятости систем $\bar{M}_r|G|1|\infty$ с относительным и абсолютным приоритетами [1,2].

Ю. В. Малинковский [3] предложил способ вычисления стационарной ф. р. времени ожидания, представляемого в виде сходящегося ряда, в системе $\bar{M}_r|M|1|\infty$ с относительным приоритетом при дисциплине $FIFO$, принятой для вызовов внутри каждого приоритетного класса.

Цель настоящего сообщения заключается в изложении очень простых соображений, приводящих к нахождению в виде сходящегося ряда ф. р. стационарного времени ожидания в системах $\bar{M}_r|G|1|\infty$ с относительным (схема А) и абсолютным с дообслуживанием прерванного вызова (схема BI) приоритетами при дисциплинах $FIFO$ и $LIFO$, принятых для вызовов каждого приоритетного класса. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают $r$ независимых пуассоновских потоков 1-вызовов, ..., $r$-вызовов с интенсивностями $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_r>0$. Длительности обслуживания всех вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют ф. р. $B(t)$, $B(+0)=0$.

Рассматриваются схемы А и BI. Внутри каждого потока приняты либо дисциплина $FIFO$—„первым пришел—первым обслужен“, либо дисциплина $LIFO$—„последним пришел—первым обслужен“.

Обозначим $(k=\overline{1, r})$

$$\sigma_k = a_1 + \ldots + a_k,\ \sigma_0 = 0,\ \beta_1 = \int_0^\infty t\,dB(t),\ \rho_{k1} = \sigma_k\beta_1 -$$

загрузка системы 1-вызовами, ..., $k$-вызовами, $\rho_k = 1-\rho_{k1}$,

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st}dB(t),\ (s \geqslant 0).$$

Пусть $C_k(t)$ — ф. р. периода занятости системы $M_r|G|1|\infty$ с интенсивностью $\sigma_k$ поступлений и с ф. р. $B(t)$ длительностей обслуживания. Тогда преобразование Лапласа — Стильтьеса (п. Л. — С.) $c_k(s)$ от ф. р. $C_k(t)$ служит решением функционального уравнения

$$c_k(s) = \beta(s + a - ac_k(s)). \tag{1}$$

Ф. р. $C_k(t)$ соответствует периоду занятости, инициированному одним вызовом. Период занятости, инициированный $n$ штук вызовами, имеет ф. р. $C_k^{n*}(t)$, где $C_k^{n*}(t)$ есть $n$-кратная свертка $C_k(t)$ с собой, и на основе ([4]) представима в виде сходящегося ряда:

$$d_tC_k^{n*}(t) = e^{-\sigma_k t}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{n}{m}\frac{(\sigma_k t)^{m-n}}{(m-n)!}\cdot d_tB^{m*}(t). \tag{2}$$

Известно, что для дисциплины *FIFO* при $\rho_{k1}<1$ и для дисциплины *LIFO* при $\rho_{k1}\leqslant 1$ существует стационарная ф. р. $W_k(t)$ времени ожидания $k$-вызова $(k=\overline{1,r})$, которая выписывается в п. Л. — С. ([5])

$$\omega_k(s) = \int_0^\infty e^{-st}dW_k(t) \quad (s \geqslant 0).$$

Напоследок заметим, что условия $\rho_{k1}<1\,(=1)$ и $-a_kc'_{k-1}(0)<1$ эквивалентны, в чем просто убедиться на основе уравнения (1).

Без ограничения общности полагаем $a_k = 1$.

2°. Схема BI (*FIFO*)

$$\omega_k(s) = \frac{\rho_k(s+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}c_{k-1}(s))}{s-1+c_{k-1}(s)} = \frac{\rho_k + \rho_k\sigma_{k-1}\dfrac{1-c_{k-1}(s)}{s}}{1+c'_{k-1}(0)\dfrac{1-c_{k-1}(s)}{-sc'_{k-1}(0)}}. \tag{3}$$

Функция $(-sc'_{k-1}(0))^{-1}(1-c_{k-1}(s))$ представляет собой п. Л. — С. от ф. р.

$$\frac{1}{-c'_{k-1}(0)}\int_0^t (1-C_{k-1}(u))\,du,$$

следовательно, не превосходит единицы. Тогда в силу существования стационарного распределения $-c'_{k-1}(0)<1$ второе слагаемое знаменателя правой части (3) строго меньше единицы при $s \geq 0$ и справедливо разложение (использовали (*), стр. 19)

$$\omega_k(s) = \left\{\rho_k + \rho_k\sigma_{k-1}\frac{1-c_{k-1}(s)}{s}\right\}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1-c_{k-1}(s)}{s}\right)^n = \rho_k +$$

$$+\rho_k\sigma_k\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-c_{k-1}(s)}{s}\right)^n = \rho_k + \rho_k\sigma_k\sum_{n\geq 1} s^{-n}\sum_{m=0}^{n} C_n^m(-1)^m c_{k-1}^m(s) =$$

$$= \rho_k + \rho_k\sigma_k\sum_{n\geq 1} s^{-n} + \rho_k\sigma_k\sum_{m\geq 1}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\sum_{n\geq m} C_n^m s^{-n} =$$

$$= \rho_k + \rho_k\sigma_k\frac{1}{s-1} + \rho_k\sigma_k\sum_{m\geq 1}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\frac{s}{(s-1)^{m+1}}.$$

Итак, п. Л. — С. $\omega_k(s)$ от плотности $p_k(t)$ ф. р. $W'_k(t)$ имеет вид

$$\omega_k(s) = \rho_k\sigma_k\left\{\sum_{m\geq 0}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\frac{1}{(s-1)^{m+1}} + \sum_{m\geq 1}(-1)^m c_{k-1}^m(s)\frac{1}{(s-1)^m}\right\} + \rho_k \tag{4}$$

Обозначим

$$A_{k-1}(t) = \sum_{m\geq 0}(-1)^m(C_{k-1}^{m*}(t)) \cdot \frac{t^m}{m!}e^t + \sum_{m\geq 1}(-1)^m(C_{k-1}^{m*}(t))' \cdot \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^t.$$

Используя формулу (4) и формулу (21. 162) из (*), выводим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для системы $\vec{M}_r|G|1|\infty$ в случае схемы BI при дисциплине FIFO и $\rho_{k1}<1$ стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = \rho_k\sigma_k A_{k-1}(t) + \rho_k\chi_t(0), \tag{5}$$

*где*

$$\chi_t(0) = \begin{cases}1, & t = 0\\ 0, & t \neq 0.\end{cases}$$

Используя формулу (5) и формулу (3. 383) из (*), получаем

Следствие 1. В условиях теоремы 1 в частном случае

$$B'(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-t}, \quad \alpha>0, \tag{6}$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция, плотность $p_k(t)$ принимает вид

$$p_k(t) = \rho_k\sigma_k e^t\sum_{m\geq 0}(-1)^m(T_{k-1}^1(m, t) + T_{k-1}^2(m, t)) + \rho_k\chi_t(0),$$

где

$$T_{k-1}^1(m, t) = \sum_{l\geq m}\frac{\sigma_{k-1}^{l-m}}{l!(l-m)!(m-1)!\Gamma(l\alpha)} \cdot B(m+1, l(\alpha+1)-m)t^{l(\alpha+1)}\times$$

$$\times {}_1F_1(l(\alpha+1)-m, l(\alpha+1)+1, -(\sigma_{k-1}+2)t). \tag{7}$$

$$T^2_{k-1}(m, t) = \sum_{l \geq m} \frac{m \sigma_{k-1}^{l-m}}{l(l-m)!\,\Gamma(l\alpha)(m-1)!} B(m, l(\alpha+1)-m)\, t^{l(\alpha+1)-1} \times$$

$$\times {}_1F_1(l(\alpha+1)-m, l(\alpha+1), -(\sigma_{k-1}+2)t). \tag{8}$$

$${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+k-1).$$

$B(x, y)$ — бета-функция.

3°. Аналогично доказательству теоремы 1 на основе формул для $\pi_k(s)$ в случае схем A и BI при дисциплинах *FIFO* и *LIFO* устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 2. *Для системы $\bar{M}_r|G|1|\infty$ в случае схемы BI, при дисциплине LIFO и $\rho_{k1} \leq 1$ стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = \rho_{k-1}\sigma_{k-1}\bar{A}_k(t) + \rho_{k-1}\chi_t(0), \tag{9}$$

*где*

$$\bar{A}_k(t) = \sum_{m \geq 0} (C_k^{m*}(t))' \cdot \frac{t^m}{m!} e^{-t} - \sum_{m \geq 1} (C_k^{m*}(t))' \cdot \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-t}$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 в частном случае (6) плотность $p_k(t)$ (9) принимает вид

$$p_k(t) = \rho_{k-1}\sigma_{k-1}e^{-t} \sum_{m \geq 0} (T_k^1(m, t) + T_k^2(m, t)) + \rho_{k-1}\psi_t(0).$$

Теорема 3. *Для системы $\bar{M}_r|G|1|\infty$ в случае схемы A при дисциплине FIFO и $\rho_{k1} < 1$ стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = (D_{k-1} - 1)A_{k-1}(t) + [\rho_r]^+ \psi_t(0), \tag{10}$$

*где*

$$D_{k-1} = \frac{1 - (\beta_1\sigma_{k-1})^2}{\beta_1} - \sigma_{k-1}\beta_1$$

$$[\rho_r]^+ = \max(0, \rho_r).$$

Следствие 3. В условиях теоремы 3 и частном случае (6) плотность $p_k(t)$ (10) принимает вид

$$p_k(t) = (D_{k-1} - 1)e^t \sum_{m \geq 1} (-1)^m (T^1_{k-1}(m, t) + T^2_{k-1}(m, t)) + [\rho_r]^+ \psi_t(0).$$

Теорема 4. *Для системы $\bar{M}_r|G|1|\infty$ в случае схемы A при дисциплине LIFO и $\rho_{k1} < 1$ стационарное время ожидания k-вызова имеет плотность*

$$p_k(t) = (2[\rho_r]^+ - D_{k-1} - 1)\bar{A}_k(t) + [\rho_r]^+ \psi_t(0). \tag{11}$$

Следствие 4. В условиях теоремы 4 в частном случае (6) плотность $p_k(t)$ (11) принимает вид

$$p_k(t) = (2|\rho_r|^+ - D_{k-1} - 1)e^{-t}\sum_{m\geq 0}(T_k^1(m, t) + T_k^2(m, t)) + |\rho_r|^+\delta_t(0).$$

Приношу благодарность Э. А. Даниеляну за постановки задач и ценные указания.

Ереванский институт
народного хозяйства

Գ. Տ. ԽՈՍՏԻԿՅԱՆ

## Երկու $\vec{M}_r|G|1|\infty$ տիպի նախապատվությամբ համակարգերում սպասման ժամանակի բաշխման բացահայտ արտահայտությունների մասին

*Դիտարկվում են $\vec{M}_r|G|1|\infty$ տիպի զանգվածային սպասարկման համակարգեր հարաբերական և բացարձակ նախապատվությամբ սպասարկման դիսցիպլինների դեպքում։*

*Ամեն մի հոսքի ներսում (հոսքերի քանակը հավասար է r-ի) պահանջները սպասարկվում են համաձայն «առաջինը եկավ՝ առաջինը սպասարկվեց» կամ «վերջինը եկավ՝ առաջինը սպասարկվեց» դիսցիպլինների։*
*i-րդ ($i = \overline{1, r}$) հոսքի պահանջները կոչվում են i-պահանջներ։*

*Աշխատանքում զուգամիտող շարքի տեսքով բոլոր դիտարկվող դեպքերի համար ստացված է i-պահանջի ($i = \overline{1, r}$) ստացիոնար սպասման ժամանակի բաշխման խտությունը։ Այն մասնավոր, բայց կարևոր դեպքում, երբ սպասարկման ժամանակները ունեն Γ—բաշխում, ստացված արտահայտություններում սպասման ժամանակի խտության դեպքում հնարավոր է լինում ազատվել փաթեթի գործողությունից։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян*, ДАН АрмССР, т. 66, № 1 (1978). [2] *Э. А. Даниелян*, ДАН АрмССР, т. 67, № 1 (1978). [3] *Ю. М. Малинковский*, Стационарное функционирование приоритетных систем массового обслуживания, канд. дис., Минск, 1980. [4] *Н. У. Прабху*, Методы теории массового обслуживания и управления запасами, изд-во «Машиностроение», М., 1969. [5] *Э. А. Даниелян*, ДАН УзССР, № 6, 1980. [6] *Дж. Риордон*, Введение в комбинаторный анализ, Изд-во иностранной лит., М., 1963. [7] *В. А. Диткин, А. П. Прудников*, Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», М., 1965. [8] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.