ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 519.212.3

МАТЕМАТИКА

Г. С. Сукиасян

О процессах хорд на прямых, пересекающих случайные поля кругов на плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 31/III 1980)

В настоящей заметке рассматриваются случайные процессы интервалов на прямой. Эти процессы возникают на прямых, пересекающих однородные и изотропные поля кругов постоянного радиуса; интервалы представляют собой хорды, по которым прямая пересекается с кругами поля. Случайное поле M кругов постоянного радиуса полностью описывается точечным полем центров кругов. Поле центров предполагается однородным и изотропным, т. е. его распределение P инвариантно относительно группы евклидовых движений плоскости.

В основе работы лежит методика, предложенная Р. В. Амбарцумяном в ([1]). Аналогичными методами в ([2]) исследовались однородные и изотропные поля отрезков на плоскости.

В работе изучается случайная величина $\eta(x)$, равная числу интервалов (хорд), целиком лежащих внутри отрезка x. Распределение $P_n(x) = P(\eta(x) = n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ не зависит от расположения отрезка на плоскости. Помимо свойств однородности и изотропности на вероятность P накладывается условие локальной абсолютной непрерывности относительно стандартного пуассоновского поля.

Основным результатом работы (теорема 1) является уравнение, связывающее распределение $P_n(x)$ с некоторыми условными распределениями случайной величины $\eta(x)$ и напоминающее известную формулу Пальма ([3]). Из теоремы 1 следует одно достаточное условие того, чтобы распределение $P_n(x)$ было пуассоновским.

Рассмотрим реализацию m поля M кругов на плоскости. Обозначим через N число кругов из m, границы которых пересекают круг K_x, построенный на отрезке x как на диаметре. Ниже всегда предполагается, что $EN^2 < \infty$, где E — знак математического ожидания относительно P. В силу сделанных предположений существуют следующие условные вероятности.

$\Pi'_n(x, z)$ есть условная вероятность события $\{\eta(x) = n\}$ при условии, что один из кругов реализации m касается отрезка x в точке, удаленной от конца отрезка на расстояние z.

$\Pi_n^{=}(x)$ есть условная вероятность события $\{\eta_l(x)=n\}$ при условии, что один круг из m проходит через оба конца отрезка x.

$\Pi_n^{I}(x, z_1, z_2, i)$ есть вероятность события $\{\eta_l(x)=n\}$ при условии, что два круга из m касаются отрезка x в точках с координатами z_1 и z_2 и лежат в одной $(i=1)$ или в разных $(i=2)$ полуплоскостях относительно прямой $g(x)$. Прямая $g(x)$ есть продолжение отрезка x.

$\Pi_n^{II}(x, z, \alpha, i)$ есть условная вероятность события $\{\eta_l(x)=n\}$ при условии, что один круг из m касается отрезка x в точке z, а граница другого проходит через конец отрезка x под углом α. Центры кругов лежат в одной $(i=1)$ или в разных $(i=2)$ полуплоскостях относительно прямой $g(x)$.

$\Pi_n^{III}(x, \alpha_1, \alpha_2, i)$ есть условная вероятность события $\{\eta_l(x)=n\}$ при условии, что границы двух кругов из m проходят через разные концы отрезка x, образуя с $g(x)$ углы α_1 и α_2, а их центры лежат в одной $(i=1)$ или в разных $(i=2)$ полуплоскостях относительно прямой $g(x)$.

Обозначим через f_2 плотность распределения пары кругов, задевающих круг K_x. Рассмотрим следующие суммы:

$$e_n^{I}(x, z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i f_2 \Pi_n^{I}(x, z_1, z_2, i);$$

$$e_n^{II}(x, z, \alpha) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i f_2 \Pi_n^{II}(x, z, \alpha, i);$$

$$e_n^{III}(x, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i f_2 \Pi_n^{III}(x, \alpha_1, \alpha_2, i).$$

Введем следующие обозначения: λ — интенсивность поля M; $\Delta\pi_n$ — разность $\Pi_n - \pi_{n-1}$; $\Delta^2 e_n$ — вторая разность $e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}$; $I(2a>x)$ — индикатор, равный единице, если $2a>x$, и нулю — в противном случае. Через ψ обозначим следующий угол:

$$\psi = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{2a}, & \text{если } x<2a, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x \geqslant 2a. \end{cases}$$

Имеет место следующее утверждение (ниже отрезки и их длины обозначаются одинаково).

Теорема 1. *Пусть P есть распределение однородного изотропного локально абсолютно непрерывного случайного поля M кругов радиуса a и пусть $EN^2<\infty$. Для любого отрезка x и любого целого n имеет место следующее уравнение:*

$$x\frac{dP_n(x)}{dx} = -2a\int_0^x \Delta\pi_n^I(x, z)dz +$$

$$+\frac{1}{2}E[N(N-1)]\int_0^x dz_2\int_0^{z_2} dz_1(z_1-z_2)^2\Delta^2 e_n^I(x, z_1, z_2) -$$

$$-aE[N(N-1)]\int_0^x z^2dz\int_0^{\pi}\cos\alpha\,\Delta^2 e_n^{II}(x, z, \alpha)d\alpha + \tag{1}$$

$$+\frac{1}{2}E[N(N-1)]a^2x^2\int_0^{\pi}d\alpha_1\int_0^{\pi}d\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\Delta^2 e_n^{III}(x, \alpha_1, \alpha_2) +$$

$$+xI(2a>x)\sqrt{4a^2-x^2}\,\Delta\pi_n^{II}(x).$$

Укажем некоторые случаи, когда равенство (1) принимает особенно простой вид. Обозначим через $L_1(x)$ множество кругов, касающихся отрезка x, через $L_2(x)$ — множество кругов, границы которых проходят через один из концов отрезка x. Через K^* обозначим круг, симметричный кругу K относительно прямой $g(x)$. Будем говорить, что распределение P обладает свойством $(\bullet)$—независимости, если для любой пары кругов K_1, $K_2 \in L_1(x) \cup L_2(x)$ имеет место

$$f_2(K_1, K_2)\cdot\Pi_n(x, K_1, K_2) = f_2(K_1, K_2^*)\cdot\Pi_n(x, K_1, K_2^*),\quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Pi_n(x, K_1, K_2)$ есть условная вероятность события $\{\nu(x)=n\}$ при условии, что два случайных круга реализуются как K_1 и K_2.

Укажем одно достаточное условие $(\bullet)$ — независимости. Рассмотрим направленную прямую g; поле M порождает на g маркированный точечный процесс $\{Y_i, \varepsilon_i\}$, $i=\ldots-1, 0, 1, \ldots$, где Y_i — проекция на g центра круга K_i, пересекаемого прямой g; ε_i—снабженное знаком расстояние от центра круга K_i до прямой g, причем $\varepsilon_i<0$, если центр круга K_i лежит в левой полуплоскости относительно прямой g.

Лемма. *Для того, чтобы распределение P обладало свойством $(\bullet)$—независимости, достаточно, чтобы знаки марок ε_i процесса $\{Y_i, \varepsilon_i\}$ были независимыми.*

В случае наличия $(\bullet)$ независимости функции $e_n(x, \ldots)$ тождественно равны нулю, что на основании теоремы 1 приводит к следующим утверждениям.

Следствие 1. *Пусть поле M удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Если распределение P обладает свойством $(\bullet)$—независимости, то для любого отрезка x и любого целого n имеет место равенство*

$$x\frac{dP_n(x)}{dx} = -2\nu a\int_0^x \Delta\pi_n^I(x,z)\,dz +$$

$$+\nu x I(2a>x)\sqrt{4a^2-x^2}\,\Delta\pi_n^-(x).$$

Следствие 2. *Пусть обладающее свойством (•)—независимости распределение P удовлетворяет условиям теоремы 1. Для того, чтобы распределение $P_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ было пуассоновским $P_n(x) = \frac{S^n}{n!}e^{-S}$, достаточно, чтобы условные вероятности $\pi_n^-(x)$ и $\pi_n^I(x,z)$, $z\in[0, x)$ совпадали с безусловной вероятностью $P_n(x)$. Параметр S имеет вид*

$$S = 4\nu\left(a\frac{x}{2} - \int_0^{\gamma}\sqrt{a^2-t^2}\,dt\right),$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{если } 2a>x, \\ a, & \text{если } 2a\leq x. \end{cases}$$

Всесоюзный научно-исследовательский
институт комплексного электрооборудования

Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

Շրջանների պատահական դաշտը հատող ուղիղների վրա առաջացող լարերի պրոցեսների մասին

Հարթության վրա դիտարկվում են հաստատուն շառավիղով շրջանների համասեռ և իզոտրոպ պատահական դաշտերը։ Այդ դաշտերը հատող ուղիղների վրա առաջանում են լարերի պատահական պրոցեսներ։ Ուսումնասիրվում է այն լարերի քանակը $\eta(x)$ որոնք ամբողջովին ընկած են x հատվածի մեջ։ Աշխատանքի հիմնական արդյունքն է հանդիսանում $\eta(x)$ պատահական մեծության բաշխումը նույն մեծության որոշ պայմանական բաշխումների հետ կապող հավասարումը։ Ստացված է $\eta(x)$ մեծության բաշխման Պուասոնյան լինելու մի բավարար պայման։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. V. Ambartzumian.* Adv. Appl. Prob., vol. 9 (1977). [2] *В. К. Оганян,* ДАН Арм. ССР, т. 68, №3 (1979). [3] *А. Я. Хинчин.* Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 49, Изд-во АН СССР, 1955.