ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

П. З. Мартычян

О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 22/III 1980)

В работе ([1]) были доказаны теоремы существования обобщенных решений первой краевой задачи для вырождающихся уравнений эллиптического типа, характер вырождения которых определяется некоторой матрицей.

В настоящей заметке приведены (без доказательств) теоремы о суммируемости, ограниченности, непрерывности по Гёльдеру, а также о неравенстве Гарнака для таких решений.

Теоремы доказаны методами, предложенными Ю. Мозером (см. ([2,3])) и развитыми впоследствии в работах Д. Серрина ([4]), Н. Трудингера ([5]), С. Н. Кружкова ([6]), А. В. Иванова (для параболических уравнений) ([7,8]), И. М. Колодия ([9–11]) и др.

В невырожденном случае аналогичные вопросы рассматривались в работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой (см. ([12])).

Наиболее близкие к данной работе результаты получены в работах ([9–11]).

1°. Пусть Ω —ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1_{m}(A, \Omega)$ ($W^1_m(A, \Omega)$) линеал функций u из $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$ ($W^1_1(\Omega)$), для которых конечна норма

$$\|u\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \|A_i u_x\|_{m_i,\Omega} \quad (\|u\| = \|u\|_0 + \|u\|_{1,\Omega})^*,$$

где $m_i > 1$, $A_i u_x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_j}$, $i = 1, \ldots, n$; $\|a_{ij}\| = A$ — некоторая матрица, такая, что

$$a_{ij} \in L_{s_i}(\Omega), \quad s_i \geq m_i, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и, кроме того, для почти всех (п. в.) $x \in \Omega$ существует матрица $\|b_{ij}\| = B = A^{-1}$, причем

---

* Здесь и всюду ниже $\|\cdot\|_{a,\Omega} \equiv \|\cdot\|_{L_a(\Omega)}$ для любого $a > 0$.

$$b_{ij} \in L_{r_{ij}}(\Omega), \quad r_{ij} \geqslant 1, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Совершенно так же, как и в работе ([6]) (стр. 302, 303), можно показать, что $W^{1}_{m}(A, \Omega)$ и $\overset{0}{W}{}^{1}_{m}(A, \Omega)$ — рефлексивные банаховы пространства.

Лемма 1. *Пусть*

$$1/\beta_i = \max_j (1/m_j + 1/r_{ij}) \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$1/l = (1/n)\left(\sum_{i=1}^{n} 1/\beta_i - 1\right) > 0. \tag{4}$$

Тогда для любых функций $v \in \overset{0}{W}{}^{1}_{m}(A, \Omega)$, $u \in W^{1}_{m}(A, \Omega)$ *справедливы неравенства*

$$\|v\|_{l,\Omega} \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{\beta_i,\Omega} \leqslant c_2 \|v\|_0,$$

$$\|u\|_{l,\Omega} \leqslant c_3 \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\beta_i,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}\right) \leqslant c_4 \|u\|,$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим в области Ω уравнение

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} L_i(x, u, u_x) + L_0(x, u, u_x) = 0, \tag{5}$$

где $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, *обобщенным решением* которого назовем функцию $u \in W^{1}_{m}(A, \Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} L_i(x, u, u_x)\eta_{x_i} + L_0(x, u, u_x)\eta\right] dx = 0, \tag{6}$$

выполняющемуся для любой функции $\eta \in \overset{0}{W}{}^{1}_{m}(A, \Omega)$.

Относительно функций $L_i(x, u, p)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ предполагаются выполненными для *п. в.* $x \in \Omega$ и произвольных $u \in R$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in R^n$ неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} L_i(x, u, p)p_i \geqslant d_1 \sum_{i=1}^{n} |A_i p|^{m_i} - g_1(x)|u|^k - f_1(x) \\
&|B_i^* \bar{L}(x, u, p)| \leqslant d_2 \sum_{j=1}^{n} |A_j p|^{m_j(m_i-1)/m_i} + e_i(x)|u|^{k-1} + h_i(x), \quad i = 1, \ldots, n \\
&|L_0(x, u, p)| \leqslant d_3(x) \sum_{j=1}^{n} |A_j p|^{m_j(k-1)/k} + g_2(x)|u|^{k-1} + f_2(x)
\end{aligned}\right| \tag{7}$$

где $d_1, d_2 = \mathrm{const} > 0$, $B_i^* \bar{L} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} L_j$; $d_3, f_1, f_2, g_1, g_2, e_i, h_i > 0$,

$$d_3^{s}, f_1, f_2, g_1, g_2, e_i^{t_i/(t_i-1)}, h_i^{t_i/(t_i-1)} \in L_1(\Omega). \tag{8}$$

$\alpha = \min\limits_i (s_i/m_i)$, причем будем предполагать, что

$$m_i/s_i + k/l < 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $k = \max\{\delta, m_1, \ldots, m_n\}$, а l определяется соотношением (4).

Из условий (7) и леммы 1 вытекает конечность интеграла в левой части тождества (6).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), (4), (7)–(9). *Тогда обобщенное решение* $u(x)$ *уравнения* (5) *суммируемо с любой степенью* $q > 0$ *в шаре* K_R *радиуса* R *таком, что концентрический с ним шар* K_{2R} *содержится в* Ω, *причем имеет место оценка*

$$|u|_{q,K_R} \leq [c_1(|u|_{\gamma,K_{2R}})^{\theta} + c_2]^{\tau(\nu)},$$

где $\gamma = k\alpha'$, $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha' = \alpha/(\alpha-1)$,

$\theta = k(l - M\alpha')M^{-1}(l - k\alpha')^{-1}$,

$\tau(\nu) = (M/m)^{\nu}[1 + lM^{-1}(k - M)(l - k\alpha')^{-1}(l/\alpha' M)^{-\nu}]^{-1}$,

ν — *такое целое число, что*

$$\alpha' k\theta^{-1}(l/\alpha' M)^{\nu} + (k - M)(l - M\alpha')^{-1} l\alpha' \geq q,$$

$$M = \max_i m_i, \quad m = \min_i m_i.$$

Если $M = m$, *то имеет место оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \in K_R} |u| \leq c_1(|u|_{\gamma,K_{2R}})^{\theta} + c_2. \tag{10}$$

2°. Пусть теперь матрица A 0 диагональна: $a_{ii} = a_i \in L_{s_i}(\Omega)$, $s_i \geq m_i$, $a_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$. Очевидно, что матрица B при этом будет также диагональной и $b_{ii} = a_i^{-1}$, $b_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$.

Положим $r_{ii} = r_i$, тогда $a_i^{-1} \in L_{r_i}(\Omega)$. Заметим, что в условиях (7) теперь $A_i p = a_i p_i$, $B_i^* \overline{L} = a_i^{-1} L_i$.

Пусть теперь показатели β_i и l определены соотношениями

$$1/\beta_i = 1/m_i + 1/r_i, \quad 1/l = (1/n)\left(\sum_{i=1}^{n} 1/\beta_i - 1\right) \tag{11}$$

и удовлетворяют условиям

$$1/\beta_i < 1, \quad 1/l > 0. \tag{12}$$

При диагональной матрице A утверждение леммы 1 справедливо при показателях β_i и l, определенных соотношениями (11) и удовлетворяющих условиям (12).

Теорема 2. *Пусть выполнены: условия* (7) *с диагональной матрицей* A, *условия* (8), *а также условия* (9), *в которых показатель* l *определяется соотношениями* (11) *и удовлетворяет условиям* (12). *Тогда для обобщенного решения* $u(x)$ *уравнения* (5) *выполняется оценка* (10), *где показатель* γ *и шары* K_R *и* K_{2R} *та-*

кие же, как в теореме 1, $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$, $\vartheta = k(l - \alpha' m)\bar{m}^{-1}(l - k\alpha')^{-1}$, *где* $\bar{m} = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/m_i\right)^{-1}$.

3°. Пусть матрица A вновь произвольна.

Положим $s = \min_i s_i$, $r_i = \min_j r_{ij}$, $m = \min_i m_i$, $\alpha = s/m$, $\iota = m - n/\alpha - m \sum_{i=1}^{n} 1/r_i$,

$$H(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n} (\rho^{-n/r_i} \| b_{ij} \|_{r_i, K_\rho})^m + \sum_{i,j=1}^{n} (\rho^{-n/s} \| a_{ij} \|_{s, K_\rho})^m,$$

$$\varkappa(\rho) = (\rho^{\iota} \| f_1 \|_{s,\rho})^{1/m} + (\rho^{\iota} \| f_2 \|_{s,\rho})^{1/(m-1)} + \left(\rho^{\iota} \sum_{i=1}^{n} \| h_i^{m/(m-1)} \|_{r_i,\rho}\right)^{1/m}.$$

Теорема 3 (неравенство Гарнака). *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем в неравенствах* (7) $m_i = \delta = m$, *кроме того*, $1/r_i - 1/r_j \leq 1/n$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$. *Пусть* $u(x)$ — *неотрицательное обобщенное решение уравнения* (5) *в шаре* $K_{5R} \subset \Omega$ *и* $H(\rho) \leq \varkappa_1 = \mathrm{const} > 0$ *для любого* $\rho \in (0, 5R)$. *Тогда* $\operatorname{vraimax}_{x \in K_R} u \leq C(\operatorname{vraimin}_{x \in K_R} u + \varkappa(5R))$, $c = c(n, m, s, r_i, d_1, d_2, \varkappa_1) > 0$.

Из теоремы 3 как следствие (см., например, [4], [7]) вытекает

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем в неравенствах* (7) $m_i = \delta = m$, *кроме того*, $1/r_i - 1/r_j < 1/n$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, n$. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение уравнения* (5) *в шаре* $K_R \subset \Omega$ *и* $H(\rho) \leq \varkappa_1 = \mathrm{const} > 0$ *для всех* $\rho \in (0, R]$. *Тогда существуют* $\gamma \in (0, 1)$ *и* $c > 0$, *зависящие только от* $n, m, s, r_i, d_1, d_2, \varkappa_1$, *такие, что для всех* $\rho \in (0, R)$ $\operatorname{osc}(u, K_\rho) \leq c(\rho/R)^{\gamma}$.

Автор выражает благодарность О. А. Ладыженской и А. В. Иванову за постановку задачи, внимание и существенную помощь в процессе работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Երկրորդ կարգի վերածվող քվազիգծային էլիպտիկ հավասարումների ընդհանրացված լուծումների որոշ հատկությունների մասին

Հոդվածում դիտարկվում է n-չափանի էվկլիդյան տարածության Ω տիրույթում երկրորդ կարգի քվազիգծային էլիպտիկ հավասարում, որի վերածումը բնութագրվում է որոշակի մատրիցով։ Վերածումը բնութագրող մատրիցը, որի էլեմենտները հանդիսանում են x-ից (x∈Ω) կախված հանրագումարելի ֆունկցիաներ, ենթադրվում է շրջելի համարյա ամենուրեք Ω տիրույթում (այսպես կոչված թույլ վերածում)։

Տրված է հավասարման ընդհանրացված լուծումների սահմանումը։ Բեր-

ված են թեորեմներ ընդհանրացված լուծումների հանրագումարելիության, սահմանափակության, ըստ Հյոլդերի անընդհատության, ինչպես նաև Հարնակի անհավասարության բավարարելու մասին:

Թեորեմները ապացուցված են իտերացիաների մեթոդով, որը առաջարկվել է Յ. Մոզերի կողմից և զարգացվել է հետագայում Ջ. Սերրինի, Ն. Թրուդինգերի, Ս. Ն. Կրուժկովի, Ա. Վ. Իվանովի, Ի. Մ. Կոլոդիի և այլ հեղինակների աշխատանքներում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Иванов, П. З. Мкртычян*, Труды МИАН, т. 147 (1980). [2] *J. Moser*, Comm. Pure, Appl. Math., vol. 14, № 3 (1961). [3] *J. Moser*, Comm. Pure, Appl. Math., vol. 14, № 3 (1961). [4] *J. Serrin*, Acta Math., vol. 111, № 3—4 (1964). [5] *N. Trudinger*, Ann. Scuola norm. super., Pisa, vol., 27, № 11 (1973). [6] *С. Н. Кружков*, Мат. сб., т. 77, № 3 (1968). [7] *А. В. Иванов*, Труды МИАН, т. 102, вып. 5 (1967). [8] *А. В. Иванов*, Труды МИАН, т. 116, вып. 7 (1971). [9] *И. М. Колодий*, Вестн. МГУ, № 5, 1970. [10] *И. М. Колодий*, ДАН СССР, т. 197, № 2 (1971). [11] *И. М. Колодий*, «Украинский мат. журн.», т. 27, № 3 (1975). [12] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», М., 1973. [13] *Лу Вень-Туан*, Вестн. ЛГУ, № 7, 1961. [14] *Ю. А. Дубинский*, Мат. сб., т. 64, № 3 (1964).