ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 517.522.6

МАТЕМАТИКА

Г. К. Оганесян

Об одном свойстве функций класса B_p

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 3/III 1980)

В настоящей работе доказана одна теорема об одном свойстве функций класса B_p. Для ее формулировки и доказательства мы напомним некоторые свойства пространств Безиковича ([1]). Функция $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ принадлежит классу B_p, $p\geq 1$, если $f(x)\in L_p(-T, T)$ для любого T и если для всякого $\varepsilon>0$ найдется тригонометрический полином $P(x)=\sum_{\lambda\in Q} a_\lambda e^{i\lambda x}$ (Q—конечное подмножество действительной оси) такой, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)-P(x)|^p dx<\varepsilon.$$

Из определения следует, что если $f(x)\in B_p$ и $g(x)\in B_p$, то для любых комплексных чисел α, β и действительного λ функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$, $e^{i\lambda x}$ также принадлежат B_p. Для любой функции из B_p существует предел

$$\|f(x)\|_{B_p}\overset{\text{def}}{=}\overline{M}_p f(x)=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Норма в B_p определяется формулой (1). Положим $m_p=\{f(x)\in B_p,\ \overline{M}_p f(x)=0\}$. Тогда фактор-пространство B_p/m_p, которое мы обозначим также через B_p, есть банахово пространство. Для любых $f(x)$ и $g(x)\in B_2$ существует предел

$$(f, g)\overset{\text{def}}{=}M(f, \overline{g})=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cdot\overline{g}(x)dx. \tag{2}$$

Пространство B_2 становится гильбертовым (несепарабельным), если определить скалярное произведение формулой (2). Пусть дана последовательность действительных, отличных друг от друга чисел λ_n и пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t} \tag{3}$$

Система $\{e^{i\lambda_n t}\}_1^{\infty}$ ортонормальна в B_2.

По теореме Рисса — Фишера ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $f(t) \in B_2$ и

$$f(t) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

В работе Е. М. Никишина ([1]) доказана следующая теорема.

Теорема (Е. М. Никишин). *В B_2 найдется функция $\psi(t)$ такая, что ряд* (3) *является ее рядом Фурье и для некоторого* $\mu > 0$

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{\mu|\psi(t)|^2} dt < +\infty.$$

В настоящей работе доказано, что в B_2 существуют функции, для которых ряд (3) является их рядом Фурье и которые удовлетворяют другим ограничениям на рост. Точнее, имеет место следующее.

Теорема 1. *Пусть $A(t)$ $(0 \le t < \infty)$ положительная, стремящаяся к $+\infty$, монотонно возрастающая функция. Тогда в B_2 можно найти функцию $\psi_A(t)$ такую, что ряд* (3) *является ее рядом Фурье и*

$$|\psi_A(t)| \le A(|t|) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

В работе доказано, что аналогичное утверждение справедливо для любой функции пространства B_p, $p \ge 1$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $A(t)$ $(0 \le t < \infty)$ — положительная, стремящаяся к $+\infty$, монотонно-возрастающая функция. Для любой функции $f(x) \in B_p$ существует функция $\psi_A(t, f) \in B_p$, которая эквивалентна $f(t)$ по норме B_p и*

$$|\psi_A(t, f)| \le A(|t|), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Доказательство теоремы 2. Так как $f(t) \in B_p$, то существует последовательность полиномов

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{k_j} a_k^{(j)} e^{i\lambda_k^{(j)} t}.$$

так что $\lim\limits_{j\to\infty}\|f(t)-P_j(t)\|_{B_p}=0$.

Мы будем считать, что $\|P_{j+1}(t)-P_j(t)\|_\infty\to 0$ при $j\to\infty$.

Убедимся в возможности такого подбора последовательности. Пусть $\{P_i(t)\}_1^\infty$ произвольная последовательность полиномов, стремящаяся к функции $f(t)$ по норме B_p. Определим последовательность $Q_j(t)$ следующим образом.

$$P_1(t),\ P_1(t)+\frac{P_2(t)-P_1(t)}{n_1},\ P_1(t)+2\,\frac{P_2(t)-P_1(t)}{n_1},\ \ldots,$$

$$P_1(t)+(n_1-1)\,\frac{P_2(t)-P_1(t)}{n_1},\ P_2(t),\ P_2(t)+\frac{P_3(t)-P_2(t)}{n_2},\ \ldots$$

где $n_k>k\|P_{k+1}(t)-P_k(t)\|_\infty$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$.

Разность двух соседних членов последовательности $Q_j(t)$ равна

$$|Q_{j+1}(t)-Q_j(t)|=\left|(s+1)\,\frac{P_{k+1}(t)-P_k(t)}{n_k}-s\,\frac{P_{k+1}(t)-P_k(t)}{n_k}\right|=$$

$$=\left|\frac{P_{k+1}(t)-P_k(t)}{n_k}\right|\leqslant\frac{1}{k}\quad(0\leqslant s\leqslant n_k-1).$$

Значит $\|Q_{j+1}(t)-Q_j(t)\|_\infty\to 0$ при $j\to\infty(k\to\infty)$. Имеем также

$$\|Q_j(t)-f(t)\|_{B_p}\leqslant\|P_k(t)-f(t)\|_{B_p}+\frac{s}{n_k}\|P_{k+1}(t)-P_k(t)\|_{B_p}\ (0\leqslant s<n_k).$$

Отсюда следует, что при $j\to\infty(k\to\infty)$ последовательность полиномов $Q_j(t)$ сходится к функции $f(t)$ по норме B_p.

Теперь построим по индукции возрастающую последовательность положительных чисел $T_j(j\geqslant 0)$ следующим образом. Существует число T_0 такое, что

$$A(T_0)>\|P_1(t)\|_\infty.$$

Предположим, что числа $T_0,\ T_1,\ \ldots,\ T_j$ построены. Определим функции $\varphi_j(t)$ $(j\geqslant 1)$

$$\varphi_j(t)=\begin{cases}P_j(t) \text{ при } t\in(T_{j-1},\ T_j]\cup[-T_j,-T_{j-1})\\ 0 \text{ при остальных } t\end{cases}$$

Через T_{j+1} обозначим такое число, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $\quad T_{j+1}\geqslant(j+1)T_j\sup\limits_{-T_j\leqslant t\leqslant T_j}\left|\sum\limits_{k=1}^{j}\varphi_k(t)-P_{j+1}(t)\right|;$

2) когда $T>T_{j+1}$, то

$$\left|\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|P_{j+1}(t)-P_i(t)|^p dt-\|P_{j+1}(t)-P_i(t)\|_{B_p}\right|<\sup_i\|P_j(t)-P_i(t)\|_{B_p};$$

3) $\qquad A(T_{j+1}) = \|P_{j+1}\|_\infty$.

Функция $\psi_A(t, f)$ определяется следующим образом:

$$\psi_A(t, f) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t).$$

Этот ряд сходится при всех t, так как носители функций $\psi_j(t)$ не пересекаются.

Докажем, что $\psi_A(t, f)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Действительно, при $T \in [T_j, T_{j+1})$ и $s < j$ имеем

$$\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f) - P_s(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|P_j(t) - P_s(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f) - P_j(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Обозначим соответственно A_1 и A_2 первое и второе слагаемые правой части неравенства (4). В силу свойства 2) последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ получим

$$A_1 = \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f) - P_j(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\sup_j \|P_j(t) - P_s(t)\|_{B_p},\ 1 \leqslant s < j). \tag{5}$$

В силу свойства 1) последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ получим

$$A_2 = \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f) - P_j(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{2T}\int_{-T_{j-1}}^{T_{j-1}}|\psi_A(t, f) - P_j(t)|^p dt +\right.$$

$$\left. + \frac{T - T_{j-1}}{T}\|P_{j+1}(t) - P_j(t)\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{T_{j-1}}{T_j}\sup_{-T_{j-1} \leqslant t \leqslant T_{j-1}}\left|\sum_{k=1}^{j-1}\psi_k(t) - P_j(t)\right|^p +\right.$$

$$\left. + \|P_{j+1}(t) - P_j(t)\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{j} + \|P_{j+1}(t) - P_j(t)\|_\infty\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда следует, что $A_2 \to 0$ при $T \to \infty\ (j \to \infty)$. Из неравенств (4), (5) и того, что $A_1 \to 0$ при $T \to \infty\ (j \to \infty)$, имеем

$$\overline{\lim_{T \to \infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi_A(t, f) - P_s(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\sup_j \|P_j(t) - P_s(t)\|_{B_p}.$$

Следовательно,

$$\lim_{s \to \infty}\|\psi_A(t, f) - P_s(t)\|_{B_p} = 0.$$

Отсюда следует, что $f(t)$ и $\psi_A(t, f)$ эквивалентны по норме B_p.

Наконец, в силу свойства 3) последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ получим

$|\varphi_A(t, f)| \le A(|t|)$, $-\infty<t<+\infty$, и теорема 2 доказана. Доказательство теоремы 1 можно провести в полной аналогии с доказательством теоремы 2.

В этом случае функция $\varphi_A(t)$ и последовательности $\{T_j\}_1^\infty$ определяются следующим образом:

1) $T_j \ge jT_{j-1}\left(\sum_{n=1}^{j} |a_n|^2\right)$;

2) когда $T>T_j$, то

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n=s+1}^{j} a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt - \sum_{n=s+1}^{j} |a_n|^2\right| < \sum_{n>j} |a_n|^2$$

при $1 \le s<j$;

3) $$A(T_j) \ge \sum_{n=1}^{j} |a_n|$$

$$\varphi_A(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{j} a_n e^{i\lambda_n t}, & \text{при } t\in(T_{j-1}, T_j] \cup [-T_j, -T_{j-1}) \\ 0, & \text{при } t\in[-T_0, T_0]. \end{cases}$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Е. М. Никишину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Գ. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

B_p դասի ֆունկցիաների մի հատկության մասին

Դիցուք $B_p (p \ge 1)$ Բեզիկովիչի տարածությունն է։ Տված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t} \qquad (1)$$

շարքը, որտեղ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2<\infty$

Ռիսս–Ֆիշերի թեորեմի համաձայն գոյություն ունի այնպիսի $f(t)\in B_2$ *ֆունկցիա, որ*

$$f(t) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 1. Դիցուք $A(t)$-ն $(0 \le t<\infty)$ դրական, $\uparrow\infty$ ձգտող, մոնոտոն աճող ֆունկցիա է: Այս B_2-ում գոյություն ունի այնպիսի $\varphi_A(t)$ ֆունկցիա, որ (1) շարքը համարվում է նրա համար Ֆուրյեի շարք և

$$|\varphi_A(t)| \leqslant A(|t|) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքն է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 2. Դիցուք $A(t)$-ն $(0 \leqslant t < +\infty)$ դրական, $+\infty$ ձգտող, մոնոտոն աճող ֆունկցիա է: Այդ դեպքում ցանկացած $f(t) \in B_p$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\varphi_A(t, f)$ ֆունկցիա, որն էկվիվալենտ է $f(t)$-ին B_p նորմայով և

$$|\varphi_A(t, f)| \leqslant A(|t|), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *A. Besicovitch*, Almost periodic functions, Gambridge, 1932. 2 *Е. М. Никитин*, Матем. сб., т. 96 (138), № 1 (1975).