ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 514.765.7

МАТЕМАТИКА

В. А. Нерсесян

Об одном классе допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^6

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 27/II 1980)

1. Пусть $H_{2,n}$ — многообразие двумерных плоскостей в R^n, $K\subset H_{2,n}$ — комплекс двумерных плоскостей в $H_{2,n}$, K_Q — четырехмерный конус, образованный двумерными плоскостями, проходящими через точку $Q\in R^n$. $\pi(Q; h)$ — касательная плоскость к конусу K_Q, проходящая через $h\in K_Q$.

Определение. Комплекс K называется допустимым, если для почти всех $Q\in R^n$ и $h\in K_Q$ плоскость $\pi(Q; h)$ определена и зависит только от h.

Такие подмногообразия введены И. М. Гельфандом и М. И. Граевым в связи с задачей интегральной геометрии (1). В настоящей работе изучается один важный класс допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^6. Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^5 дана в работе (2).

2. К каждой плоскости $h\in H_{2,n}$ присоединим семейство ортонормированных реперов $\{M; e_i\}$ $i=\overline{1, n}$ так, чтобы $e_a\subset h$ $a, b=1, 2$, а $e_N\subset\pi(Q; h)$ $N, G, L, U=\overline{1, 4}$. Главными на многообразии $H_{2,n}$ являются формы

$$\omega^3,\ \omega^4,\ \omega^\alpha,\ \omega^3_a,\ \omega^4_a,\ \omega^\alpha_a\quad \alpha, \beta=\overline{5, n},$$

а на семействе четырехмерных плоскостей $\pi(Q; h)$

$$\omega^\alpha,\ \omega^\alpha_a,\ \omega^\alpha_3,\ \omega^\alpha_4.$$

В работе (2) показано, что если комплекс K допустим, то

$$\omega^\alpha_a = A^\alpha_{a\beta}\omega^\beta. \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда $n=6$, а плоскости $\pi(Q; h)$ являются касательными к некоторой четырехмерной поверхности $V^4\subset R^6$ в точках $M\in V^4$. Тогда уравнения (1) можно привести к виду

$$\omega^6_1 = A_1\omega^6,\quad \omega^6_2 = A^6_{25}\omega^5 \tag{2}$$

Действительно, пусть $h \in K_Q$. Представим точку $P \in h$ в виде $P = M + x^1 e_1$, направляя для этого первый вектор e_1 из семейства реперов $\{M; e_i\}$, присоединенного к двумерным плоскостям h, по $\overrightarrow{MP}$. Так как $dP \in \pi(Q; h)$, то

$$dP = \left(\omega^1 + \frac{dA_1}{(A_1)^2}\right)e_1 + \left(\omega^2 - \frac{\omega_1^2}{A_1}\right)e_2 + \left(\omega^3 - \frac{\omega_1^3}{A_1}\right)e_3 + \left(\omega^4 - \frac{\omega_1^4}{A_1}\right)e_4,$$

$$\omega_1^\alpha = A_1 \omega^\alpha, \text{ где } A_1 = -\frac{1}{x^1}.$$

Легко заметить, что мы находимся в следующей ситуации. Известно, что если в R^6 задана некоторая поверхность $S^4 \subset R^6$, то, присоединяя семейство реперов $\{M; e_i\}$ к каждой точке поверхности S^4 таким образом, чтобы $e_N \subset \pi(Q; h)$, уравнения инфинитезимального перемещения репера можно писать в виде

$$dM = \theta^N e_N, \ de_N = \theta_N^i e_i, \ de_\alpha = \theta_\alpha^i e_i.$$

Система $\theta^\alpha = 0$ задает уравнения поверхности S^4. Если продифференцировать $\theta^\alpha = 0$ внешним образом и применить лемму Картана, то получим

$$\theta_N^\alpha = h_{NL}^\alpha \theta^L, \quad h_{NL}^\alpha = h_{LN}^\alpha, \tag{3}$$

где h_{NL}^α — тензор второй квадратичной формы поверхности. Для удобства записи вместо буквы θ будем писать ω. Справедлива

Теорема 1. *Пусть K — шестимерный комплекс двумерных плоскостей, образованный касательными к некоторой четырехмерной поверхности $V^4 \subset R^6$. Комплекс K допустим тогда и только тогда, когда в касательной плоскости $\pi(Q; h)$ для любого $h \in K_Q$ существует двумерная плоскость одномерных направлений, сопряженных любым направлениям плоскости h.*

Доказательство. Пусть Q — произвольная фиксированная точка на h. Тогда $Q = M + x^N e_N$. В силу равенства $dQ = 0$ имеем $\omega^N + dx^N + x^L \omega_L^N = 0$, $x^N \omega_N^\alpha = 0$. Возьмем произвольную точку $P \in h$. Пусть $P = M + y^N e_N$. Требуется, чтобы для любой точки $P \in h$ при фиксации произвольной точки $Q \in h$ касательная плоскость $\pi(Q; h)$ совпадала с касательной плоскостью к поверхности V^4 в точке $M \in V^4$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $y^N \omega_N^\alpha = 0$ (в силу соотношений $x^N \omega_N^\alpha = 0$). Подставляя сюда значения (3), получим $h_{NL}^\alpha y^N \omega^L = 0$ (в силу соотношений $h_{NL}^\alpha x^N \omega^L = 0$). Как известно, направления $T = \{t^N\}$ и $R = \{r^N\}$ называются сопряженными относительно квадратичной формы $h_{NL}^\alpha \omega^N \omega^L$, если $h_{NL}^\alpha t^N r^L = 0$. Так как из системы уравнений $h_{NL}^\alpha x^N \omega^L = 0$ следует, что $h_{NL}^\alpha y^N \omega^L = 0$ для любой точки $P \in h$ и любой фиксированной точки $Q \in h$, то $\operatorname{rang}(A) = 2$, где

$$A=\begin{pmatrix} h^5_{N1}x^1 & h^5_{N2}x^2 & h^5_{N3}x^3 & h^5_{N4}x^4 \\ h^6_{N1}x^1 & h^6_{N2}x^2 & h^6_{N3}x^3 & h^6_{N4}x^4 \\ h^5_{N1}y^1 & h^5_{N2}y^2 & h^5_{N3}y^3 & h^5_{N4}y^4 \\ h^6_{N1}y^1 & h^6_{N2}y^2 & h^6_{N3}y^3 & h^6_{N4}y^4 \end{pmatrix}$$

Это значит, что одномерные направления, сопряженные к любым направлениям плоскости h, образуют двумерную плоскость.

Достаточность доказывается обратным рассуждением.

Известно, что пару билинейных форм $\varphi^{\alpha}(x;y)=H^{\alpha}_{NL}x^N y^L$ с симметричными коэффициентами можно одновременно привести к одному из видов, указанных в [3]. Применим эту теорему к квадратичным формам $h^{\alpha}_{NL}\omega^N\omega^L$. Из теоремы Ю. Б. Ермолаева [2] следует, что $\operatorname{rang}(A)=2$ для следующих матриц:

I
$$(h^5_{NL})=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\qquad (h^6_{NL})=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

II
$$(h^5_{NL})=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix},\qquad (h^6_{NL})=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

III
$$(h^5_{NL})=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},\qquad (h^6_{NL})=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Основные уравнения поверхности V^4: $\omega^3=0$, $\omega^6=0$,

$$\omega^5_1=\omega^1,\ \omega^5_2=\omega^2,\ \omega^5_3=0,\ \omega^5_4=0,\ \omega^6_1=0,\ \omega^6_2=0,\ \omega^6_3=\omega^3,\ \omega^6_4=\omega^4. \tag{4}$$

Если продифференцировать уравнения (4) внешним образом, то станет ясно, что системы уравнений $\omega^1=\omega^2=0$ и $\omega^3=\omega^4=0$ вполне интегрируемы. Следовательно V^4 расслаивается на произведение двумерных поверхностей V^2_1 и V^2_2. Уравнения инфинитезимального перемещения репера на этих поверхностях показывают, что $V^2_1\subset E^5_1$, $V^2_2\subset E^5_2$, где E^5_1, E^5_2 — пятимерные плоскости, натянутые соответственно на векторы e_N, e_6 и e_N, e_5. После канонизации репера легко обнаружить, что $V^2_1\subset E^3_1$ и $V^2_2\subset E^3_2$, где E^3_1, E^3_2 — пересекающиеся в точке трехмерные плоскости, натянутые соответственно на векторы e_3, e_4, e_6 и e_1, e_2, e_5. Легко доказать, что они являются характеристиками для семейства плоскостей E^5_α.

II. Основные уравнения поверхности V^4: $\omega^5=0$, $\omega^6=0$,

$$\omega^5_1=\omega^2,\ \omega^5_2=\omega^1,\ \omega^5_3=\omega^4,\ \omega^5_4=\omega^3,\ \omega^6_1=0,\ \omega^6_2=\omega^2,\ \omega^6_3=0,\ \omega^6_4=\omega^4. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнения (5) внешним образом, мы заметим, что система уравнений $\omega^2=\omega^4=0$ вполне интегрируема. Значит V^4 расслаивается на двумерные поверхности V^2. Уравнения инфинитезимального перемещения репера на поверхости V^2 показывают, что V^2—плоскость, натянутая на векторы e_1, e_3, причем касательная плоскость к V^4 в точках плоскости V^2 принадлежит гиперплоскости $E^3=\{e_N, e_3\}$. Найдем фокальные образы нашего двухпараметрического семейства двумерных плоскостей V^2. Точку $P\in V^2$ представим в виде $P=M+x^1e_1+x^3e_3$. Так как $dP\in V^2$, то, учитывая результаты дифференцирования уравнений (5), получим, что наше семейство двумерных плоскостей V^2 имеет три фокуса.

III. Основные уравнения поверхности V^4: $\omega^5=0$, $\omega^6=0$,

$$\omega_1^5=\omega^1,\ \omega_2^5=-\omega^2,\ \omega_3^5=\omega^3,\ \omega_4^5=-\omega^4,\ \omega_1^6=\omega^2,\ \omega_2^6=\omega^1,\ \omega_3^6=\omega^4,\ \omega_4^6=\omega^3. \tag{6}$$

Покажем, что наша поверхность V^4 несет некоторую определенную комплексную структуру. Для этого введем на V^4 почти комплексную структуру, порожденную полем аффиноров $f=(f_\beta^\alpha)$ следующим образом:

$$f(e_1)=e_2,\ f(e_2)=-e_1,\ f(e_3)=e_4,\ f(e_4)=-e_3, \tag{7}$$

т. е. положим $e_2=ie_1$, $e_4=ie_3$. Известно, что оператор f почти комплексной структуры удовлетворяет уравнениям

$$f_L^N f_U^L=-\delta_U^N,\ df_U^N-f_L^N\omega_U^L+f_U^L\omega_L^N=f_{UL}^N\omega^L.$$

В силу (7) $f_1^2=-f_2^1=1$, $f_3^4=-f_4^3=1$, а остальные $f_L^N=0$. Вычислим тензор Нейенхейса

$$\mathbf{N}_{UL}^N=f_U^Q(f_{QL}^N-f_{LQ}^N)-f_L^Q(f_{QU}^N-f_{UQ}^N)$$

для почти комплексной структуры. Оказывается, что $\mathbf{N}_{UL}^N=0$. Это и означает, что наша поверхность несет комплексную структуру. Выясним ее геометрический смысл. Пусть $e=\omega^a e_a$—вектор на поверхности V^4 с координатами $\{\omega^a\}$. В каждой точке поверхности V^4 рассмотрим нормальное пространство $R^6/_{(V^4, M)}$ и оператор F, действующий по закону $F(e_5)=e_6$, $F(e_6)=-e_5$, т. е. положим $e_6=ie_5$. Пусть $\{M; E_1, E_2, E_3\}$— семейство комплексных реперов, присоединенных к каждой точке M поверхности V^4 так, что $E_1=e_1$, $E_2=e_3$, $E_3=e_5$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера имеют вид:

$$dM=\Omega^a E_a;\ dE_a=\Omega_a^b E_b+\Omega_a^3 E_3,\ dE_3=\Omega_3^a E_a+\Omega_3^3 E_3,$$

где $\Omega^1=\omega^1+i\omega^2$, $\Omega^2=\omega^3+i\omega^4$, $\Omega^3=\omega^5+i\omega^6=0$. Тогда вектор $e=\{\omega^a\}$ можно представить в комплексном виде $e=\Omega^a E_a$. Известно, что вторая квадратичная форма поверхности принимает значения в нормальном расслоении $R^6/_{(V)}$. Оказывается, в нашем случае ее можно рассматривать как форму с комплексными численными значениями. Действительно, в силу (6)

$$\varphi(e) = h^s_{NL}\omega^N\omega^L e_s = [(\omega^1+i\omega^3)^2+(\omega^2+i\omega^4)^2]e_5 = [(\Omega^1)^2+(\Omega^2)^2]E_5.$$

Однако V^4, вообще говоря, не является двумерной комплексной поверхностью. Действительно, в противном случае из (6) мы имели бы $\Omega^3 = 0$, $\Omega^3_1=\Omega^1$, $\Omega^3_2=\Omega^2$, где $\Omega^3_1 = \omega^5_1+i\omega^6_1$, $\Omega^3_2=\omega^5_2+i\omega^6_2$. Тогда формы Ω^1 и Ω^2 удовлетворяют уравнениям $d\Omega^1 = \Omega^1_1\wedge\Omega^1+\Omega^1_2\wedge\Omega^2$, $d\Omega^2 = \Omega^2_1\wedge\Omega^1+\Omega^2_2\wedge\Omega^2$, где $\Omega^1_1=\omega^1_1+i\omega^2_1$, $\Omega^2_1=\omega^3_1+i\omega^4_1$, $\Omega^1_2=\omega^1_3+i\omega^2_3$, $\Omega^2_2=\omega^3_3+i\omega^4_3$. Из соотношений $e_2 = ie_1$, $e_4 = ie_3$ следует, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
&\omega^1_1 = \omega^2_2, \quad \omega^3_1 = \omega^4_2, \quad \omega^2_1+\omega^1_2 = 0, \quad \omega^4_1+\omega^3_2 = 0,\\
&\omega^1_3 = \omega^2_4, \quad \omega^3_3 = \omega^4_4, \quad \omega^2_3+\omega^1_4 = 0, \quad \omega^4_3+\omega^3_4 = 0.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть K — допустимый комплекс двумерных плоскостей в R^6, образованный касательными плоскостями к некоторой четырехмерной поверхности $V^4 \subset R^6$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

I. *R^6 расслаивается на произведение двумерных поверхностей. В каждой точке V^4 эти поверхности лежат на пересекающихся в точке трехмерных плоскостях, которые образуют двухпараметрическое семейство и являются характеристиками для двухпараметрического семейства гиперплоскостей.*

II. *V^4 — это двухпараметрическое семейство двумерных плоскостей V^2 в R^6 с тремя фокусами, причем касательные плоскости к V^4 в точках V^2 принадлежат R^5.*

III. *V^4 — поверхность, несущая комплексную структуру, определяемую полем аффиноров f на касательном расслоении к V^4 и полем аффиноров F на нормальном расслоении к V^4, превращающих касательные плоскости к V^4 в двумерные комплексные пространства, а нормальные плоскости — в комплексную прямую, причем вторая квадратичная форма поверхности представляется в виде формы со значениями в комплексной прямой. V^4 является двумерной комплексной поверхностью в C^3 тогда и только тогда, когда в структурных уравнениях (6) поверхности V^4 соблюдаются условия (8).*

Автор выражает свою благодарность проф. А. М. Васильеву за полезные советы и за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

R^6-ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների մի դասի մասին

Դիցուք $H_{2,n}$-ը R^n-ում երկչափ հարթությունների բազմաձևությունն է (կոմպլեքս). K-ն n-չափանի ենթաբազմաձևություն է $H_{2,n}$-ում, K_q-ն բա-

ռաչափ կոն է՝ կազմված $Q\in R^n$ կետով անցնող երկչափ հարթություններով. $\pi(Q;h)$-ը այդ կոնին $h\in K_Q$ կետում շոշափող հարթությունն է։

K կոմպլեքսը կոչվում է թույլատրելի, եթե համարյա բոլոր $Q\in R^n$ և $h\in K_Q$ համար $\pi(Q;h)$ հարթությունը որոշված է և կախված չէ h-ից։

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների մի դաս R^n-ում, երբ $\pi(Q,h)$ հարթությունները պատկանում են R^n-ում ինչ որ քառաչափ մակերևույթի։ Տրվում է այդպիսի կոմպլեքսների լրիվ դասակարգումը R^n-ում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев.* Функциональный анализ и его прил-я, т. 2, вып. 3 (1968). [2] *В. А. Нерсесян,* ДАН Арм. ССР, т. 70, № 3 (1980). [3] *Ю. Б. Ермолаев,* ДАН СССР, т. 132, № 2 (1960).