ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

## Равномерное приближение полиномами на специальных полиэдрах Вейля с вещественно невырожденным остовом в пространстве $C^2$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15.II.1980)

В работе ([1]) доказано, что в вещественно невырожденном поли-эдре Вейля $D$ в пространстве $C^2$ $\bar{\partial}$-уравнение имеет решение, допускающее равномерную оценку. Из этого факта, а также из возможности локального голоморфного приближения на вещественно невырожденных полиэдрах с помощью более или менее стандартных рассуждений (см., например, ([2])) следует, что пространство $A(D)$ функций, голоморфных в области $D$ и непрерывных на $\bar{D}$, совпадает с равномерным замыканием на $\bar{D}$ полиномов $P(D)$.

В настоящей статье доказывается, что $P(D)=A(D)$ при менее обременительных в отношении невырожденности условиях на $D$, а именно: $D$ имеет вещественно невырожденный остов; однако от по-лиэдра требуется, чтобы он был специальный, т. е. число определяющих его функций было равно двум (размерности пространства $C^2$). Отметим, что класс специальных полиэдров в пространстве $C^2$ достаточно широк в том смысле, что любой полиэдр по теореме Бишопа (см. ([3])) можно аппроксимировать специальными.

Теорема. *Пусть $D=\{z\in C^2:|\chi_i(z)|<1,\ i=1, 2\}$ — полиномиальный полиэдр Вейля с вещественно невырожденным остовом. Тогда $P(D)=A(D)$.*

Доказательство. Напомним, что остов $D$ — это его двумерная грань $\Gamma=\{z\in\bar{D}:|\chi_1(z)|=|\chi_2(z)|=1\}$, а его вещественная невырожденность означает, что $d|\chi_1|^2\wedge d|\chi_2|^2\neq 0$ на $\Gamma$. Из этого условия теоремы следует, что можно подобрать столь малое число $\delta>0$, чтобы полиэдр

$$G=\{z\in C^2:1-\delta<|\chi_i(z)|<1,\ i=1, 2\},$$

который как бы „пристроен" к $\Gamma$, являлся вещественно невырожденным (в дальнейших рассуждениях число $\delta$ фиксировано). Как было отмечено выше, любая функция из $A(G)$ равномерно на $\overline{G}$ приближается функциями, голоморфными в окрестности $\overline{G}$. Поэтому для любой $f$, $f \in A(D) \subseteq A(G)$, и $\varepsilon > 0$ найдется функция $F_\varepsilon$, голоморфная в некоторой окрестности $\overline{G}$ и такая, что

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z) - F_\varepsilon(z)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Далее, возьмем $\eta_\varepsilon = \eta(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы замыкание полиэдра

$$G_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}^2 : 1 - \delta < |\chi_i(z)| < 1 + \eta(\varepsilon),\ i = 1, 2\}$$

принадлежало упомянутой окрестности. Тогда $F_\varepsilon$ будет голоморфной на $\overline{G}_\varepsilon$. Обозначим

$$\gamma_1 = \{z \in \overline{G}_\varepsilon : |\chi_1(z)| = |\chi_2(z)| = 1 + \eta(\varepsilon)\};$$

$$\gamma_2 = \{z \in \overline{G}_\varepsilon : |\chi_1(z)| = |\chi_2(z)| = 1 - \delta\};$$

$$\gamma_3 = \{z \in \overline{G}_\varepsilon : |\chi_1(z)| = 1 - \delta,\ |\chi_2(z)| = 1 + \eta(\varepsilon)\};$$

$$\gamma_4 = \{z \in \overline{G}_\varepsilon : |\chi_1(z)| = 1 + \eta(\varepsilon),\ |\chi_2(z)| = 1 - \delta\}.$$

Остов полиэдра $G_\varepsilon$ является объединением соответствующим образом ориентированных $\gamma_1 - \gamma_4$. Согласно интегральной формуле Вейля, для $z \in G_\varepsilon$ имеем

$$F_\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_k} F_\varepsilon(\zeta) \frac{J(\zeta, z)\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]} = \sum_{k=1}^{4} I_k(z), \tag{2}$$

где $J(\zeta, z) = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}$; $P_{k1}$ и $P_{k2}$ — коэффициенты Гефера полинома $\chi_k$, определяемые из разложения

$$\chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = (\zeta_1 - z_1) P_{k1}(\zeta, z) + (\zeta_2 - z_2) P_{k2}(\zeta, z),\ k = 1, 2.$$

Функция $I_1(z)$ из правой части (2) голоморфна в окрестности $\overline{D}$, так как при $\zeta \in \gamma_1$ и $z \in \overline{D}$ знаменатель $[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]$ под знаком интеграла $I_1(z)$ в нуль не обращается. Как это следует из доказываемой ниже леммы, имеет место неравенство $\max_{z \in \Gamma} |F_\varepsilon(z) - I_1(z)| < c_1 \varepsilon$, где число $c_1$ от $\varepsilon$ не зависит. Вместе с (1) это дает $\max_{z \in \overline{D}} |f(z) - I_1(z)| =$ (по принципу максимума) $= \max_{z \in \Gamma} |f(z) - I_1(z)| < (1 + c_1)\varepsilon$, т. е. $f$ равномерно на $\overline{D}$ приближается функциями, голоморфными в окрестности $\overline{D}$, а в силу того, что $D$ — полиномиальный полиэдр, то и полиномами. Итак, $f \in P(D)$, а поскольку $f$ — произвольная функция из $A(D)$, то $P(D) = A(D)$.

Лемма. *Для интегралов $I_2(z) - I_4(z)$ в (2) имеет место оценка*

$$\max_{z \in \Gamma} |I_k(z)| < c\varepsilon,\ k = 2, 3, 4,$$

*где константа $c$ от $\varepsilon$ не зависит.*

Доказательство. Рассматривая $\gamma_2$ как остов полиэдра $\{z\in C^2: |\chi_i(z)|<1-\delta,\ i=1,2\}$, на замыкании которого функция $f$, по условию, голоморфна, по формуле Вейля при $z\in\Gamma$ имеем

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2} f(\zeta)\,\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]}=0.$$

Поэтому

$$I_2(z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2} F_1(\zeta)\,\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2}[F_1(\zeta)-f(\zeta)]\,\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]}.$$

Так как $\gamma_2\subset\overline{G}$, то из (1) для $z\in\Gamma$ получаем

$$|I_2(z)|<\frac{\varepsilon}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_2}\left|\frac{J(\zeta,z)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]}\right|. \tag{3}$$

Далее, $|\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)|\geq||\chi_k(\zeta)|-|\chi_k(z)||=\delta$ $(k=1,2)$ при $z\in\Gamma$ и $\zeta\in\gamma_2$. Отсюда и из (3) следует

$$\max_{z\in\Gamma}|I_2(z)|<c\cdot\varepsilon. \tag{4}$$

Интеграл $I_3$ (и аналогичный ему $I_4$) оценивается несколько сложнее. Рассмотрим вещественно трехмерную грань полиэдра $G$,

$$\sigma=\{\zeta\in G_\varepsilon: |\chi_1(\zeta)|=1-\delta,\ 1-\delta<|\chi_2(\zeta)|<1+\gamma(\varepsilon)\}.$$

Эта грань ограничена циклами $\gamma_2$ и $\gamma_3$. При фиксированном $z_0\in\Gamma$ форма

$$\omega=F_1(\zeta)\,\frac{J(\zeta,z_0)\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta)-\chi_1(z)][\chi_2(\zeta)-\chi_2(z)]}$$

имеет особенностями на $\sigma$ кривую

$$P_{z_0}=\{\zeta\in\sigma: |\chi_1(\zeta)|=1-\delta_1,\ \chi_2(\zeta)=\chi_2(z_0)\},$$

а на $\sigma\setminus P_{z_0}$ эта форма замкнута. По формуле Стокса

$$\int\limits_{\gamma_3}\omega-\int\limits_{\gamma_2}\omega=\int\limits_{\sigma}d\omega+\int\limits_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega,$$

или $I_3(z_0)-I_2(z_0)=\int\limits_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega$. Отсюда и из (4) следует, что для оценки

$I_3$ достаточно оценить $\int\limits_{P_{z_0}}\operatorname{res}\omega$. Здесь

$$\operatorname{res}\omega = F_1(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)\,d\zeta_1}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} = -F_1(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)\,d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}$$

$\left(\text{так как на } P_{z_0} \text{ имеем } \chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0), \text{ то } d\chi_2 = 0, \text{ т. е. } \dfrac{d\zeta_1}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} = -\dfrac{d\zeta_2}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}\right).$

Если в выражении для $\operatorname{res}\omega$ функцию $F_1$ заменить на $f$, то полученная форма

$$\Omega = f(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)\,d\zeta_1}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}} = -f(\zeta)\,\frac{J(\zeta, z_0)\,d\zeta_2}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}$$

на аналитической поверхности

$$T_{z_0} = \{\zeta : |\chi_1(\zeta)| < 1-\delta,\ \chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)\}$$

голоморфна, за исключением особенностей $M \cap T_{z_0}$, где $M = \{\zeta \in C^2 : \operatorname{grad}\chi_2(\zeta) = 0\}$. Но каждая связная компонента множества $M$ — либо точка, либо уровень функции $\chi_2$ (очевидно, отличный от уровня $\chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)$). Таким образом, на $T_{z_0}$ могут быть только одноточечные компоненты $M$, поэтому для всех $z$ из некоторой выколотой окрестности точки $z_0$ на поверхности $T_z$ форма $\Omega$ особенностей не имеет. Заметив, что $\partial T_z = P_z$, по формуле Стокса

$$\int_{P_z} \Omega = \int_{T_z} d\Omega = 0.$$

Интеграл $\int_{P_z} \Omega$, очевидно, от $z$ зависит непрерывно (по крайней мере в окрестности $z_0$). Поэтому $\int_{P_{z_0}} \Omega = 0$. Отсюда, с учетом того, что $|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)| \geqslant \delta$ при $\zeta \in P_{z_0}$, имеем

$$\left|\int_{P_{z_0}} \operatorname{res}\omega\right| = \left|\int_{P_{z_0}} \operatorname{res}\omega - \int_{P_{z_0}} \Omega\right| = \left|\int_{P_{z_0}} |F_1(\zeta)-f(\zeta)|\,\frac{J(\zeta, z_0)\,d\zeta_1}{|\chi_1(\zeta)-\chi_1(z_0)|\,\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}}\right| < c\varepsilon$$

$\Bigg($если $\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}$ обращается в нуль в некоторых точках на $P_{z_0}$, то в этих точках $\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1} \neq 0$ и мы заменяем $\dfrac{d\zeta_1}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}}$ на $-\dfrac{d\zeta_2}{\dfrac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}}\Bigg).$

Оценка интеграла $I_4(z)$ проводится аналогично.

В заключение автор выражает благодарность Г. М. Хенкину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

## $C^n$ տարածության մեջ գտնվող իրական իմաստով ոչ էափոխվող հենքով Վեյլի հատուկ բազմանիստների վրա հավասարաչափ մոտարկում բազմանդամներով

*Դիցուք D-ն երկչափ կոմպլեքս տարածության մեջ գտնվող Վեյլի հատուկ բազմանիստ է, որի հենքը իրական իմաստով ոչ էափոխվող է։ Բազմանիստը կոչվում է հատուկ, եթե նրան որոշող բազմանդամների քանակը համընկնում է տարածության չափողականության հետ։ Նշենք, որ հատուկ բազմանիստների ընտանիքը բավականին լայն է այն իմաստով, որ ըստ Բիշոպի թեորեմի, կամայական բազմանիստ կարելի է մոտարկել հատուկներով։*

*Հոդվածում ապացուցվում է, որ կամայական ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է D-ում և անընդհատ է $\bar{D}$-ում, մոտարկվում է բազմանդամներով հավասարաչափ $\bar{D}$-ի վրա։ Ապացուցման եղանակը օգտագործում է [1]-ում տրված $\bar{\partial}$ հավասարման հավասարաչափ գնահատականով լուծումը։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Петросян, Г. М. Хенкин*, «Известия АН АрмССР», Матем., т. 13, № 5-6 (1978). [2] *J. Lieb*, Math. Ann., vol. 184, №1 (1969). [3] *Р. Ганнинг, Х. Росси*, Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969.