ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

К теоремам А. Л. Шагиняна о предельном убывании мероморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 21/II 1980)

В [1–3] академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном был поставлен и систематически исследовался следующий общий вопрос, в идейном отношении примыкающий к принципу Фрагмена—Линделёфа [4,5]: как сильно может убывать вдоль заданного множества E, сгущающегося к границе области $|z|<R\leq\infty$, мероморфная в этой области функция f, имеющая заданный рост неванлинновской характеристики $T_f(r)$. В [6] этот вопрос рассматривался для функций, мероморфных в единичном круге D. здесь дополняются результаты из [6] и приводятся соответствующие предложения для случая конечной комплексной плоскости C.

Введем необходимые определения. Для мероморфной в C функции* f через Ω_f обозначим класс всех монотонных функций $\omega(r)>0$, $\omega(+\infty)=0$, определенных на $(1, +\infty)$, таких, что

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\ \omega(r)\,T_f(r)=s_\omega<\infty,\qquad \sum_{a\in Z_f}\omega(|a|)<\infty;$$

для мероморфной в D функции f Ω_f означает класс всех монотонных $\omega(r)>0$, $\omega(1-0)=0$, определенных на $(0, 1)$, таких, что

$$\overline{\lim_{r\to1-0}}\ \omega(r)\,\frac{T_f(r)}{1-r}=s_\omega<\infty,\qquad \sum_{a\in Z_f}\omega(|a|)<\infty.$$

Если $0<\varepsilon<1$ есть невозрастающая функция, заданная на $(1,+\infty)$ (на $(0, 1)$), такая, что

---

* Везде дальше предполагается, что f не является рациональной функцией (и в частности, если это не оговорено, $f\neq$ const.); если $|f|<1$ в D, то полагаем $T_f(r)\equiv1$ для $0<r<1$, Z_f означает последовательность всех нулей f; $\varepsilon>0$, $k>1$, $0<\mu<1$ каждый раз есть произвольные фиксированные числа.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\omega(r)}{r}\, dr<\infty \quad \left(\int_{0}^{1} \frac{\omega(r)}{1-r}\, dr<\infty\right), \tag{1}$$

то $\omega(r)(T_f(kr))^{-1}\in\Omega_f$ $(\omega(r)(1-r)(T_f(r+\delta(1-r)))^{-1}\in\Omega_f)$*. Конечную вполне аддитивную функцию множества $\mu\geq 0$, определенную на борелевских подмножествах C, называем распределением массы в $e\subset C$, если $\operatorname{supp}(\mu)\subseteq e$ и $\mu(e)=1$. Для ядер

$$l(z, \zeta)=|1-z/\zeta| \ (z, \zeta\in C, \ \zeta\neq 0), \ h(z, \zeta)=|z-\zeta|/|1-\bar{z}\zeta| \ (z, \zeta\in D)$$

рассмотрим потенциалы распределений массы в компакте e

$$u_{\mu}^{(l)}(z)=\int_{e} \log \frac{1}{l(z, \zeta)}\, d\mu(\zeta), \qquad u_{\mu}^{(h)}(z)=\int_{e} \log \frac{1}{h(z, \zeta)}\, d\mu(\zeta)$$

и так же как и для логарифмического потенциала введем постоянные Робэна

$$R^{(l)}(e)=\inf_{\mu}\sup_{z\in e} u_{\mu}^{(l)}(z), \quad R^{(h)}(e)=\inf_{\mu}\sup_{z\in e} u_{\mu}^{(h)}(z)$$

и соответствующие емкости компактных множеств:

$\operatorname{capl}(e)=\exp\{-R^{(l)}(e)\}$ $(e\subset C, 0\notin e)$, $\operatorname{caph}(e)=\exp\{-R^{(h)}(e)\}$ $(e\subset D)$. Относительно caph см. ([9,10]); емкость capl тесно связана с функцией Грина (см. замечание 1) и имеет сходство с caph — обе эти величины ≤ 1 и обращаются в 0 одновременно с логарифмической емкостью $\operatorname{cap}(e)$. Для $0<\rho<1$ $C_{z,\rho}$ есть эвклидовый круг с центром $0\neq z\in C$ радиуса $\rho|z|$, $D_{z,\rho}=\{\zeta\in D: h(z, \zeta)\leq\rho\}$ есть гиперболический круг с центром $z\in D$ радиуса ρ и справедливы равенства $\operatorname{capl}(C_{z,\rho})=\rho=\operatorname{caph}(D_{z,\rho})$. Скажем, что множество из C (из D) имеет конечный обзор, если его можно покрыть системой кругов $\{C_{z_n,\rho_n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(\{D_{z_n,\rho_n}\}_{n=1}^{\infty})$ так, что ряд, составленный из чисел ρ_n, $n=1, 2, \ldots$, сходится. Предполагается, что непустое $E\subset C$ $(E\subset D)$ лежит вне некоторой окрестности точки $z=0$, имеет точки, сходящиеся к $\infty\in\partial C$ (к ∂D), и каждая порция E есть компакт. Введем такие определения диаметров: если $e\subset C$ расположено в углу раствора $<\pi$ с вершиной в $z=0$, то $d^{(l)}(e)=\inf\{\rho: e\subset C_{z,\rho}, z\in C\}$ (и в остальных случаях полагаем $d^{(l)}(e)=1$); если $e\subset D$, то $d^{(h)}(e)=\sup\{h(z, \zeta): z, \zeta\in e\}$; множество $e\subset D$ не ограничено, если $d^{(h)}(e)=1$; $h(z, e)=\inf\{h(z, \zeta): \zeta\in e\}$. Для краткости формулировок условимся: $\bar{\omega}(k, r)=\omega(kr)$, $\bar{\omega}(\delta, r)=\omega(r+\delta(1-r))$, $e^{*}=\{|z|: z\in e\}$, $e_{*}=\{e^{i\arg z}: z\in e\}$, для функции g, заданной на e, $\|g\|_e=\sup\{|g(z)|: z\in e\}$.

Теорема 1. *Для каждой мероморфной в C функции f и произвольного $\omega\in\Omega_f$ существует множество $E_{\omega,k}$ со следующими свойствами:*

1. *$E_{\omega,k}$ является объединением компактов $L_n\subset C$ $(n\geq 1)$ таких, что для некоторого $n_0\geq 1$ и всех $n\geq n_0$*

---

* См. также ([1,8]) и соотношение (1) в ([8])

$$d^{-1}(L_n) \leqslant \text{const} < 1, \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} |\log \operatorname{capl}(L_n)|^{-1} < \infty. \tag{2}$$

2. *Каждое L_n состоит из конечного числа континуумов $L_{n,i}$, $1 \leqslant i \leqslant p_n$, таких, что существуют точки $\zeta_{n,i} \in L_{n,i}$ так, что $\forall \omega^* \in \Omega_f$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \omega^*(|\zeta_{n,i}|) < \infty.$$

3. *Для некоторой не зависящей от z конечной постоянной $c = c_{\omega,k} > 0$ и всех $z \in C \setminus E_{\omega,k}$ выполнено неравенство*

$$|f(z)| \geqslant \exp[-c\,\overline{\omega}(k, |z|)].$$

Утверждение останется в силе, если заменить **C** *на* **D**, *l на h, k на θ.*

Каждое множество из $C \setminus (|z| < 1)$ (из **D**), которое может быть покрыто системой компактов* L_n, удовлетворяющих (2) (в случае **D** — (2) с заменой l на h), называем L-множеством. Неограниченный континуум из **C** (или из **D**) не является L-множеством. Используя оценку А. Картана для модуля полинома (4), нетрудно показать, что каждое L-множество имеет конечный обзор; если α, β — const, $\beta > 1$, $0 \leqslant \varphi_n < 2\pi$, то множества

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} C_{\alpha^n e^{i\varphi_n},\, n^{-\beta}} \quad (\alpha > 1), \qquad \bigcup_{n=2}^{\infty} D_{(1-\alpha^n)e^{i\varphi_n},\, n^{-\beta}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

имеют конечный обзор, но не являются L-множествами. Продолжая исследования У. Хеймана (11), Н. В. Ушакова получила (7,8) оценки снизу разности субгармонических функций вне множеств с конечным обзором; оценки для модуля мероморфных функций см. (4,12). Можно утверждать, что для случая мероморфных функций теорема 1 значительно точнее соответствующих результатов из (7,8). Следствие 1 можно рассматривать как распространение одной из первоначальных теорем А. Л. Шагинина (1).

Следствие 1. *Пусть $E \subset$* **C** *есть произвольный континуум с предельной точкой на ∂***C**. *Если для мероморфной в* **C** *функции f и некоторого $\omega \in \Omega_f$ выполнено*

$$\lim_{\substack{z \to \partial C \\ z \in E}} \overline{\omega}(k, |z|) \log |f(z)| = -\infty,$$

то $f \equiv 0$. Утверждение останется в силе, если заменить **C** *на* **D**, *k на θ.*

Для мероморфной в **C** или **D** f (и заданного k или θ) опреде-

* Не обязательно состоящих из конечного числа континуумов.

лим функцию $H_{f,\omega}$ наподобие обобщенной индикатрисы Фрагмена — Линделефа для целой функции ([1,5])*: если $\omega\in\Omega_f$, то

$$H_{f,\omega}(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\omega(k,r)\log|f(re^{i\varphi})|;\quad H_{f,\omega}(\varphi)=\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,\omega(h,r)\log|f(re^{i\varphi})|.$$

В случае круга D теорему 2 можно рассматривать как граничную теорему единственности (ср. ([13]), теор. 3).

Теорема 2. *Для каждой мероморфной в C (или в D) функции f и произвольного $\omega\in\Omega_f$ выполнено равенство*

$$\operatorname{cap}(\{\varphi\in[0,2\pi]:H_{f,\omega}(\varphi)=-\infty\})=0.$$

Теорема 3 характеризует допустимый асимптотический рост нетождественной функции на исключительном множестве $E_{\omega,k}$; в формулировке теоремы для случая C величины $\operatorname{capl}(E\cap L_n)$ в (3) можно также заменить на $\operatorname{cap}((E\cap L_n)_e)$ $(n\geqslant n_0)$, если только эти числа отличны от нуля.

Теорема 3. *Пусть для мероморфной в C функции f последовательность Z_f бесконечна и $E_{\omega,k}$ есть множество, определенное в теореме 1. Если $E\subseteq E_{\omega,k}$ и каждая порция E имеет положительную емкость, то с произвольными $z_n\in L_n$ и $\forall\omega^*\in\Omega_f$ выполняется условие*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\log\|f\|_{E\cap L_n}}{\log\operatorname{capl}(E\cap L_n)}\,\overline{\omega}^*(k,|z_n|)<\infty. \tag{3}$$

Утверждение останется в силе, если заменить C на D, l на h, k на h.

Теорема 4 усиливает теорему единственности Бляшке. Уточнение внутренних теорем единственности см. ([11]); ср. также ([13]), теор. 3, ([1]).

Теорема 4. *Пусть счетное $E\subset D$ не имеет предельных точек в D и*

$$\sum_{z\in E}(1-|z|)=\infty.$$

Если для мероморфной в D функции f с $T_f(r)=O(1)$ $(r\to 1-0)$ и всех $z\in E$ выполнено неравенство

$$|f(z)|\leqslant\exp\left\{-\frac{p(z)+c\log 1/h(z,E\setminus z)}{1-|z|}\right\},$$

где $c>0$ есть произвольная конечная постоянная, $p(z)>0$,

$$\lim_{\substack{z\to\partial D\\ z\in E}}p(z)=+\infty,\ \textit{то}\ f\equiv 0.$$

---

* Нетрудно показать, что если $\frac{1}{f}$ есть целая функция конечного порядка, то для нее можно подобрать уточненный порядок $V(r)=r^{\rho(r)}$ так, что для некоторого $\omega\in\Omega_f$ функция $-H_{f,\omega}(\varphi)$ кратна обобщенной (относительно $V(r)$) индикатрисе $H_{\frac{1}{f}}(\varphi)$.

Теорема 5 есть общее предложение типа теорем А. Л. Шагиняна ([2]) относительно поведения мероморфных функций вдоль заданного E. Она применима к достаточно широкому классу множеств положительной емкости — это можно показать, пользуясь одной леммой О. Фростмана ([10]).

Теорема 5. *Если для некоторого распределения μ массы в $E\subset C$ с произвольными достаточно малыми $0<\rho<1$ выполнено условие*

$$\sup_{\zeta\in C}\left\|\int\limits_{E\cap C_{\zeta,\rho}}\log\frac{1}{l(z,\zeta)}\,d\mu(z)\right\|_{E\cap C_{\zeta,\rho}}<\infty, \tag{4}$$

то для каждой мероморфной в C функции f и $\forall\omega\in\Omega_f$

$$\int\limits_{E}\overline{\omega}(k,|z|)\log^{+}|f(z)|^{-1}d\mu(z)<\infty. \tag{5}$$

Требование (4) *не может быть опущено без нарушения справедливости* (5). *Утверждение останется в силе, если заменить C на D, C на D, l на h, k на $\mathfrak{h}$.*

Приведем одно метрическое* следствие из теоремы 5, основываясь на следующем ([10,16]): мера Хаусдорфа Λ^* определяет некоторую внешнюю меру Каратеодори для ограниченных $e\subset C$ и тогда согласно теореме С. Сакса Λ^* есть вполне аддитивная функция множества на ограниченных борелевских подмножествах C; выбирая в (4) в качестве μ меру, абсолютно непрерывную относительно Λ_s^*, получим следствие 2. Присутствие ν в (7) характеризует „протяженность" E, а (6) при $s=1$ является условием, по своему значению сходным с требованием А. Л. Шагиняна ([2]), чтобы E располагалось на спрямляемой кривой. Когда $s=2$, (6) выполнено и становится излишним; при $s=1, 2$ следствие 2 близко подходит к теоремам А. Л. Шагиняна ([2]).

Следствие 2. *Пусть $E\subset C$ имеет размерность $\leqslant s$ и*

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left\||z|^{-s}\Lambda_s^*(E\cap C_{z,\rho})\right\|_E\rho^{-1}d\rho<\infty. \tag{6}$$

Если $\nu\geqslant 0$ есть произвольная функция, заданная на E, такая, что

$$\int\limits_{E}\nu(z)\,d\Lambda_s^*(z)<\infty,\quad \nu(z)=O(|z|^{-s})\quad (z\to\partial C), \tag{7}$$

то для каждой мероморфной в C функции f и $\forall\omega\in\Omega_f$

---

* Если функция $0<\Lambda(r)<1$ непрерывна на $(0,1)$ и $\Lambda(+0)=0$, то $\Lambda^*(e)$ означает Λ—меру Хаусдорфа ограниченного $e\subset C$. говорим, что E имеет размерность (по Хаусдорфу) $\leqslant s$, если для числа $0<s\leqslant 2$ и $\forall e\subset E$ $\Lambda_s^*(e)<\infty$, где $\Lambda_s(r)=r^s$.

$$\int_E \lambda(z)\,\bar{\omega}(k,|z|)\log^+|f(z)|^{-1}d\Lambda_2(z)<\infty$$

Утверждение останется в силе, если заменить **C** *на* **D**, k *на* ϑ *и в* (6), (7.2) $|z|$ *на* $1-|z|$.

Лемма А. Пуанкаре ([17]) утверждает, что для произвольной функции $\psi(x)>0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, которая может неограниченно приближаться к 0 лишь в точках $\pm\infty$, существует целая функция $f\neq 0$ такая, что $|f(x)|=O(\psi(x))$, $|x|\to+\infty$; в ([18]) доказана теорема, близкая к гиперболическому варианту этой леммы. Каждый раз, когда для f будет указан вид функции из Ω_f (например, (1)), теорема 6 даст достаточно точную оценку роста $T_f(r)$ через ψ.

Теорема 6. *Пусть* $E\subset$ **C** ($E\subset$ **D**) *имеет предельные точки на* ∂**C** (*на* ∂**D**) *и невозрастающая функция* $0<\lambda\leq 1$ *такова, что*

$$\int_{E^*}\frac{\lambda(r)}{r}dr<\infty\quad\left(\int_{E^*}\frac{\lambda(r)}{1-r}dr<\infty\right).$$

Если мероморфная в **C** (*в* **D**) f *такова, что для заданной на* $[1,+\infty)$ (*на* $(0,1)$) *функции* $\psi>0$ *выполнено* $|f(z)|\leq\psi(|z|)$, $z\in E$, *то* $\forall\omega\in\Omega_f$

$$\int_{E^*}\frac{\lambda(r)}{r}\bar{\omega}(k,r)\log^+\frac{1}{\psi(r)}dr<\infty\quad\left(\int_{E^*}\frac{\lambda(r)}{1-r}\bar{\omega}(\vartheta,r)\log^+\frac{1}{\psi(r)}dr<\infty\right).\tag{8}$$

Из теоремы 1 вытекает также следующее (в условиях теоремы 6): существует L-множество $F\subset[1,+\infty)$ ($F\subset(0,1)$) так, что при $r\in E^*\setminus F$, $r\to+\infty$ ($r\to1-0$) выполнено

$$\bar{\omega}(k,r)\log^+1/\psi(r)=O(1)\ (\bar{\omega}(\vartheta,r)\log^+1/\psi(r)=O(1)).\tag{9}$$

Если для заданной f выбрать $E=\{z:|f(z)|^{-1}=\inf_{|\zeta|=|z|}\{|f(\zeta)|^{-1}\}\}$, то из (8), (9) можно сразу получить утверждения о взаимном росте $M_f(r)(=\sup_{0\leq\varphi<2\pi}|f(re^{i\varphi})|)$ и $T_f(kr)$ для мероморфной функции (см. ([8])). Например, из (8) вытекает, что для каждой f, мероморфной в **C**, и произвольного τ, удовлетворяющего (1),

$$\int_1^\infty\frac{\tau^2(r)}{r}\,\frac{\log^+M_f(r)}{T_f(kr)}dr<\infty,$$

что несколько отличается от теоремы Р. Неванлинны ([19]):

$$(rT_f(kr))^{-1}\int_1^r\log^+M_f(t)dt=O_k(1),\quad r\to+\infty.$$

Замечание 1. Пусть e_- есть связная компонента e^c, содержащая точку $z=\infty$, $g_e(z)$ — функция Грина области e_∞ с полюсом в $z=\infty$; можно показать, что если для компакта e $0\in e_\infty$, то $\operatorname{capl}(e)=\exp\{-g_e(0)\}$. Приведем следующие равенства: если $0\notin\Delta$ есть прямолинейный отрезок с концами $z_1, z_2\in\mathbf{C}$, γ есть дуга окружности с центром в $z=0$ раствора α, $0<\alpha\leqslant 2\pi$, то

$$\operatorname{capl}(\Delta)=\left|\frac{1-\sqrt{z_1/z_2}}{1+\sqrt{z_1/z_2}}\right|,\quad \operatorname{capl}(\gamma)=\sin\frac{\alpha}{4}\quad (\text{для } r>0\ \forall r>0).$$

Замечание 2. В п. 3 теоремы 1 (для плоскости и круга) в качестве постоянной c можно выбрать

$$c_{\alpha,1+\delta}=40(\alpha+\delta)\frac{1}{\delta}\log\frac{54}{\delta}=c_{\alpha,\delta}.$$

Замечание 3. Пусть f есть целая функция конечного порядка, $v(r)$—ее уточненный порядок; если f такова, что $(v(r))^{-1}\in\Omega_f$, то в следствии 1 указана точная предельная скорость убывания. Это можно заметить из теоремы Суньера-и-Балагера (см. ([20]), стр. 34): если $E\subset\mathbf{C}$ есть неограниченная жорданова кривая и для целой $f(z)$ конечного порядка выполнено

$$(v(|z|))^{-1}\log|f(z)|\leqslant -c_f,\quad z\in E,\quad 0<c_f<\infty,$$

то 0 есть дефектное значение для f. Например, если f есть произведение Вейерштрасса порядка $0<\rho<\infty$ и Z_f принадлежит классу сходимости, то нетрудно видеть, что $(v(r))^{-1}=r^{-\rho}\in\Omega_f$.

Научно-исследовательский институт
физики конденсированных сред
Ереванского государственного университета

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Ա. Լ. Շահինյանի թեորեմների տիպի գնահատականներ մերոմորֆ ֆունկցիաների սահմանային նվազելու համար

Շարունակվում է ուսումնասիրումը Ա. Լ. Շահինյանի կողմից ([1–4]) աշխատանքներում դրված հետևյալ ընդհանուր հարցի ուսումնասիրությունը: Դիցուք E-ն ընկած է $G:|z|<R\leqslant\infty$ տիրույթում և ունի կետեր ինչքան ասես մոտ տիրույթի ∂G եզրին (երբ $R=\infty$, ապա $\partial G=\infty$ — անվերջ հեռու կետն է)։ Խնդիրը կայանում է հետևյալում. որքան արագ կարող է ձգտել E-ի վրա զրոյի G-ում մերոմորֆ $f\not\equiv\mathrm{const}$ ֆունկցիան, անհրաժեշտ Ռ. Նևանլիննայի $T_f(r)$ խարակտերիստիկ ֆունկցիայի նախապես տրված աճ։

Ներկա հոդվածում մերոմորֆ f-ի համար մտցված է $\Omega_f=\{\omega\}$ դրական մոնոտոն ֆունկցիաների դաս, որոնց միջոցով էլ գնահատվում է f-ի նվազելու կարգը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Шагинян*, ДАН АрмССР, т. 27, № 5 (1958). [2] *А. Л. Шагинян*, ДАН СССР, т. 129, № 2 (1959). [3] *А. Л. Шагинян*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., т. 12, № 1 (1959). [4] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956. [5] *М. А. Евграфов*, Асимптотические оценки и целые функции, «Наука», М., 1979. [6] *А. Ю. Шахвердян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 2 (1979). [7] *И. В. Ушакова*, Зап. мех.-мат. факультета Харьковского ун-та, Харьковского мат. о-ва, т. 29, сер. 4 (1963). [8] *И. В. Ушакова*, Вести. Харьковского ун-та, сер. мех.-мат., вып. 34 (1970). *Н. С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала, «Наука», М., 1966. [10] *M. Tsuji*, Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959. [11] *W. K. Hayman*, Journ. Math. pures et appl., vol. 35, 2 (1956). [12] *Н. Н. Мейман*, ДАН СССР, т. 204, № 1 (1972). [13] *Э. М. Кегеян*, ДАН АрмССР, т. 37, № 5 (1963). [14] *М. М. Лаврентьев*, ДАН СССР, т. 110, № 5 (1956). [15] *F. Bagemihl*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Sar. AI, № 299 (1961). [16] *С. Сакс*, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949. [17] *Ж. Валирон*, Аналитические функции, ИЛ, М., 1957. *F. Schnitzer, W. Seidel*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 57, 4 (1967). [19] *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций, «Наука», М., 1970. [20] *А. А. Гольдберг*, Мероморфные функции, в сб. Мат. анализ, т. 10, 1973 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР), М., 1973.