ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 5

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Р. О. Назарян

# Разложение некоторых простых групп Ли

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30.I.1980)

В работе рассматривается следующая задача: пусть $G$—простая некомпактная вещественная группа Ли; нужно найти все такие пары $G'$, $G''$ ее собственных связных подгрупп Ли, чтобы $G=G'\cdot G''$, т. е. чтобы каждый $a\in G$ представлялся в виде $a=a'\cdot a''$, где $a'\in G'$, $a''\in G''$. Тройка $(G, G', G'')$ с указанным свойством называется разложением. Случай, когда $G'$, $G''$ либо обе редуктивны в $G$, либо обе максимальны в $G$, был до конца изучен в работе [1]. В работе [2] изучались минимальные разложения $(G, G', G'')$, т. е. такие, что не существует разложений вида $(G, G_0', G_0'')$, где $G_0'\subset G'$, $G_0''\subset G''$ и $G_0'\neq G'$, $G_0''\neq G''$. Именно, были найдены в явном виде все минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, обладающие тем свойством, что полупростые части групп $G'$ и $G''$ некомпактны. В настоящей работе мы продолжаем изучение разложений простых групп Ли. Мы находим в явном виде все некомпактные разложения групп $SL(2n, \boldsymbol{R})$, $Sp(n, \boldsymbol{R})$, $SO^*(4n)$, $SL(2n, \boldsymbol{C})$, $SO(n, \boldsymbol{C})$, т. е. такие разложения, у которых $G'$, $G''$ некомпактны в $G$. Как показано в [3], единственной простой группой, кроме перечисленных групп и $SO(p, q)$, $SU(p, q)$ $Sp(p, q)$, допускающей некомпактные разложения, является $E_6^{\mathrm{III}}$.

Пусть $G=G'\cdot G''$ разложение. Обозначим соответственно $g$, $g'$, $g''$ алгебры Ли, отвечающие группам $G$, $G'$, $G''$. Тогда $g=g'+g''$ [1]. Опишем разложения групп Ли при помощи соответствующих разложений алгебр Ли. Приведем некоторые обозначения из [1], которые мы используем.

Пусть $g$—полупростая вещественная алгебра Ли; $\Pi$—система простых корней этой алгебры Ли, построенная по картановской подалгебре с максимальной некомпактной частью $h$; $\Pi_1\subset\Pi$ подсистема корней, не равных нулю на $h$; $u_1$—параболическая подалгебра в $g$.

соответствующая подсистеме $\Gamma \subset \Pi_1$, инвариантной относительно естественной инволюции. $u_\Gamma = s_\Gamma + c_\Gamma + n_\Gamma$, где $s_\Gamma$ — полупростая часть, $c_\Gamma$ — центр максимальной редуктивной подалгебры $s_\Gamma + c_\Gamma$, $n_\Gamma$ — нильпотентный радикал алгебры $u_\Gamma$.

Теорема. 1 *Пусть $G$ — группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна одной из следующих алгебр:* $sl(n+1, \boldsymbol{R})$, $sp(n, \boldsymbol{R})$, $so^*(4p)$ *и пусть* $G = G' \cdot G''$ — *ее собственное некомпактное разложение. Тогда всевозможные значения* $g'$ *и* $g''$ *перечислены в табл. 1.*

*Таблица 1*

| $g$ | $g'$ | $g''$ |
|---|---|---|
| $sl(2p, \boldsymbol{R})$ | $sl(2p-1, \boldsymbol{R})$<br>или<br>$sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma$<br>или<br>$sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$<br>$(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_2\})$ | $sp(p, \boldsymbol{R})$ |
| | $sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$<br>$sl(2p-1, \boldsymbol{R}) + n_\Gamma$<br>$(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sl(p, \boldsymbol{C}) \times u(1)$<br>или<br>$sl(p, \boldsymbol{C})$<br>или<br>$sp(p, \boldsymbol{R})$ |
| $sl(4m, \boldsymbol{R})$ | $sl(4m-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$<br>или<br>$sl(4m-1, \boldsymbol{R}) + n_\Gamma$<br>$(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sp(m, \boldsymbol{C}) \times u(1)$<br>или<br>$sp(m, \boldsymbol{C})$<br>или<br>$su^*(2m) \times sp(1)$<br>или<br>$su^*(2m) \times u(1)$<br>или<br>$su^*(2m)$ |
| $sp(2n, \boldsymbol{R})$ | $sp(2n-1, \boldsymbol{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$<br>или<br>$sp(2n-1, \boldsymbol{R}) + n_\Gamma$<br>$(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ | $sp(n, \boldsymbol{C}) \times u(1)$<br>или<br>$sp(n, \boldsymbol{C})$ |
| $so^*(4p)$ | $su^*(2p) + c_\Gamma + n_\Gamma$<br>или<br>$su^*(2p) + n_\Gamma$<br>$(\Pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\})$ | $so^*(4p-2) \times so(2)$<br>или<br>$so(4p-2)$<br>или<br>$u(1, 2p-1)$ |

Теорема 2. *Пусть $G$ — группа Ли, алгебра Ли которой $g$ изоморфна одной из следующих алгебр:* $sl(2n, \boldsymbol{C})$, $so(7, \boldsymbol{C})$, $so(2n, \boldsymbol{C})$, *и пусть* $G = G' \cdot G''$ — *ее собственное некомпактное разложение. Тогда всевозможные значения подалгебр* $g'$ *и* $g''$ *указаны в табл. 2.*

| $\mathfrak{g}$ | $\mathfrak{g}'$ | $\mathfrak{g}''$ |
|---|---|---|
| $sl(2n, C)$ | $sl(2n-1, C)+m+n_1$<br>или<br>$sl(2n-1, C)+m$<br>$(m\subset\mathfrak{c}_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1, \alpha_1'\})$ | $sp(n, C)$ |
| | $sl(2n-1, C)+m+n_r$<br>$(m\subset\mathfrak{c}_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1, \alpha_1'\})$ | $su^*(2n)$ |
| $so(7, C)$ | $so(6, C)$<br>или<br>$so(5, C)$<br>или<br>$so(5, C)+m$<br>или<br>$so(5, C)+m+n_r$<br>$(m\subset\mathfrak{c}_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1, \alpha_1'\})$ | $\mathfrak{g}_2^C$ |
| $so(2n, C)$ | $sl(n, C)+m$<br>или<br>$sl(n, C)+m+n_r$<br>$(m\subset\mathfrak{c}_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_n, \alpha_n'\})$ | $so(2n-1, C)$ |
| | $sl(n, C)+m+n_r$<br>$(m\subset\mathfrak{c}_r, \Pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_n, \alpha_n'\})$ | $so(1, 2n-1)$ |
| $so(8, C)$ | $so(7, C)$<br>или<br>$so(6, C)$<br>или<br>$so(5, C)$<br>или<br>$so(5, C)+m+n_r\subset so(7, C)$<br>или<br>$so(5, C)+b,\ b\subset so(3, C)$ | $spin(7, C)$ |
| $so(16, C)$ | $so(15, C)$ | $spin(9, C)$ |

Метод нахождения всех некомпактных разложений состоит в следующем. Пусть $G=G'\cdot G''$ — собственное некомпактное разложение группы $G$. Обозначим через $K, K', K''$ максимальные полупростые компактные подгруппы в $G, G', G''$, соответственно такие, что $K=K'\cdot K''$. Включим наше разложение в максимальное собственное некомпактное разложение $G=\bar{G}'\cdot\bar{G}''$. Пусть $\bar{K}', \bar{K}''$ — максимальные полупростые компактные подгруппы в $\bar{G}', \bar{G}''$ соответственно. Все разложения компактных групп Ли подробно изучены в ([4]). Результаты этой работы позволяют явно найти все разложения $K=K'\cdot K''$, где $K'\subset\bar{K}'$, $K''\subset\bar{K}''$. Ищем все подгруппы $G'\subset\bar{G}'$ и $G''\subset\bar{G}''$, которые содержат соответственно $K', K''$, и из этих подгрупп выбираем те, которые дают разложение.

В заключение выражаю благодарность А. Л. Онищику за внимание к настоящей работе.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ռ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

## Որոշ պարզ Լիի խմբերի վերլուծություններ

*Հոդվածում դիտարկվում են* $SL(2n, R)$, $Sp(n, R)$, $SO^*(4n)$ $SL(2n, C)$, $SO(n, C)$ *խմբերը: Գտնված են այդ խմբերի բոլոր այն ոչ կոմպակտ ենթախմբերը, որոնք պարունակում են տված կոմպակտ ենթախումբը:*

*Բացահայտ տեսքով գտնված են այդ խմբերի բոլոր ոչ կոմպակտ վերլուծությունները, այսինքն այդ խմբերի ներկայացումը երկու ենթախմբերի արտադրյալի տեսքով, որտեղ ենթախմբերը հանդիսանում են տված խմբում ոչ կոմպակտ ենթախմբեր: Այնուհետև դասակարգված են բոլոր այդպիսի վերլուծությունները:*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Онищик*, Мат. сб., т. 80 (122), № 4 (1969). [2] *Р. О. Назарян*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., т. 10, № 5 (1975). [3] *А. Л. Онищик*, Мат. сб., т. 74 (116), № 3 (1967). [4] *А. Л. Онищик*, Труды ММО, вып. 11, 1962.