

КДК 539.374

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян

О верхних оценках прогибов и напряжений упруго-пластических пластин

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 11 1980)

Предлагается способ определения верхних оценок для максимальных прогибов и напряжений упруго-пластических пластин, основанный на использовании упругих решений соответствующих краевых задач. На основе этих оценок получается единая нижняя оценка для несущей способности произвольных идеально-пластических пластин. Приводятся примеры сравнения с точными решениями.

1. Используя соотношения между изгибающими моментами M_1 , M_2 , M_{12} и кривизнами срединной плоскости пластинки χ_1 , χ_2 , χ_{12} в рамках поперечного изгиба (1), можно записать

$$m_i = D(1 - \Omega)\chi_i, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (1.1)$$

где D — цилиндрическая жесткость, h — толщина, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала пластинки, m_i и χ_i — аналоги интенсивностей напряжений и деформаций:

$$m_i = \sqrt{M_i^2 - M_1M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2}, \quad \chi_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + \chi_{12}^2}. \quad (1.2)$$

В случае линейного упрочнения

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \chi_i \leq \chi_s = \frac{3\varepsilon_s}{2h} \\ \lambda \left(1 - \frac{9\varepsilon_s}{4h\chi_i} + \frac{27\varepsilon_s^2}{16h^2\chi_i^2} \right), & \chi_i \geq \chi_s \end{cases} \quad (1.3)$$

где λ — параметр упрочнения, χ_s — значение интенсивности кривизны, после достижения которого появляются остаточные деформации. На рис. 1 изображен график зависимости (1.1). В пределах упругости ($\chi_i \leq \chi_s$) этот график является прямой линией с угловым коэффициентом D . Моменту появления первых пластических деформаций в сечении соответствуют значения m_i и χ_{si} , которые служат аналогами

пределов упругости ε_s и ε_{pr} . С развитием областей пластических деформаций график $m_L \sim x_L$ отклоняется от прямой линии, непрерывно наклоняясь в сторону оси x_L . График имеет асимптоту с угловым коэффициентом $(1-\lambda)D$. При идеально пластическом материале $\lambda=1$ и асимптота становится параллельной оси x_L . Предельное значение интенсивности моментов m_{pr} , которое характеризует несущую способность сечения, оказывается в полтора раза больше предела упругости m_s .

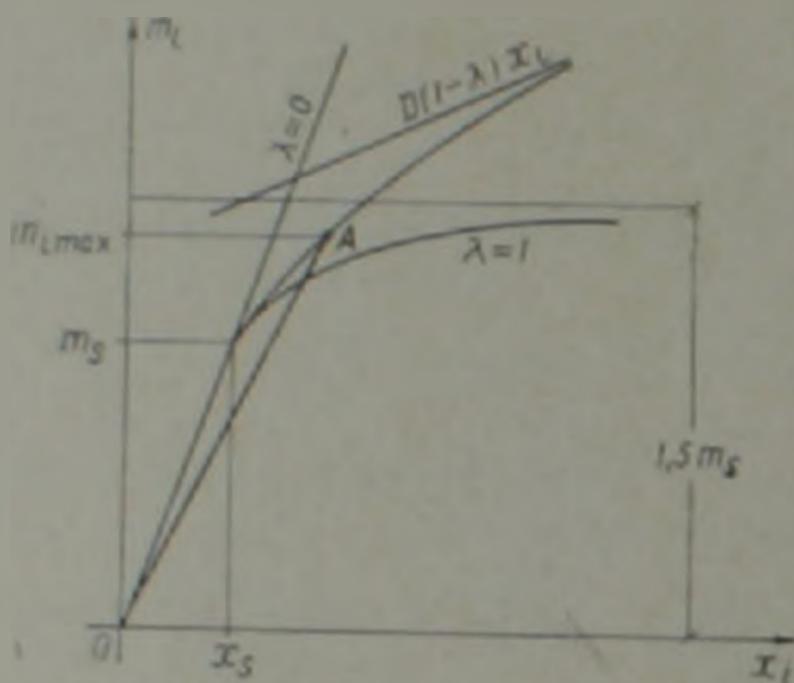


Рис. 1. Зависимость между интенсивностями моментов и кривизны сечения пластинки

Упруго-пластически изгибаемую пластинку можно рассмотреть как пластинку, изготовленную из некоторого приведенного материала с неоднородным модулем E_{np} . Соответствующую жесткость D_{np} можно представить в виде

$$D_{np} = \begin{cases} D, & x_L \leq x_s \\ D \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{9\varepsilon_s}{4hx_L} + \frac{27\varepsilon_s^3}{16h^3x_L^3} \right) \right], & x_L \geq x_s. \end{cases} \quad (1.4)$$

За пределом упругости с возрастанием интенсивности кривизны x_L жесткость приведенной упругой пластинки D_{np} монотонно убывает. Наименьшее значение D_{np}^{min} получается в том сечении, где x_L принимает наибольшее значение, т. е.

$$D_{np}^{min} = D \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{9\varepsilon_s}{4hx_{Lmax}} + \frac{27\varepsilon_s^3}{16h^3x_{Lmax}^3} \right) \right] \quad (1.5)$$

Так как

$$D_{np}^{min} > D(1-\lambda), \quad (1.6)$$

то, полагая

$$D_{np}^{min}(0) = D(1-\lambda) \quad (1.7)$$

и решая задачу упругого изгиба рассмотренной пластинки при заданных нагрузках и граничных условиях, получим завышенные значения для прогибов. Максимальные значения интенсивности кривизны пластинки обозначим через $\chi_{i\max}(0)$. Соответствующее значение интенсивности моментов $m_{i\max}(0)$, подсчитанное по действительной зависимости (1.1), будет превышать действительное максимальное значение $m_{i\max}$. Таким образом получены верхние оценки для интенсивностей кривизны, моментов и нижняя оценка для приведенной жесткости:

$$\chi_{i\max}(0) > \chi_i, \quad m_{i\max}(0) > m_i, \quad D_{\text{пр}}^{\text{min}}(0) < D_{\text{пр}}. \quad (1.8)$$

Эти оценки очень грубы и не могут представлять практический интерес. Принимая их в качестве нулевого, последующие приближения построим по рекуррентным формулам

$$D_{\text{пр}}^{\text{min}}(n) = \frac{m_{i\max}(n-1)}{\chi_{i\max}(n-1)},$$

$$m_{i\max}(n-1) = D_{\text{пр}}^{\text{min}}(n-1) \left[1 - \tau \left(1 - \frac{9\varepsilon_1}{4h\chi_{i\max}(n-1)} + \frac{27\varepsilon_1^2}{16h^2\chi_{i\max}^2(n-1)} \right) \right] \quad (1.9)$$

где $\chi_{i\max}(n-1)$ получается решением упругой задачи при $D_{\text{пр}} = D_{\text{пр}}^{\text{min}}(n-1)$. Смысл этого рекуррентного процесса наглядно можно представить графически (рис. 2). На оси χ_i цифрами 0, 1, 2, ..., ∞ обозначены значения соответствующих приближений максимальной интенсивности кривизны $\chi_{i\max}(n)$. Причем нулевое приближение $\chi_{i\max}(0)$ получается из упругого решения, когда связь между m_i и χ_i дается линией CD , параллельной асимптоте LN ($D_{\text{пр}}(0) \equiv D(1-\tau)$). Имея ну-

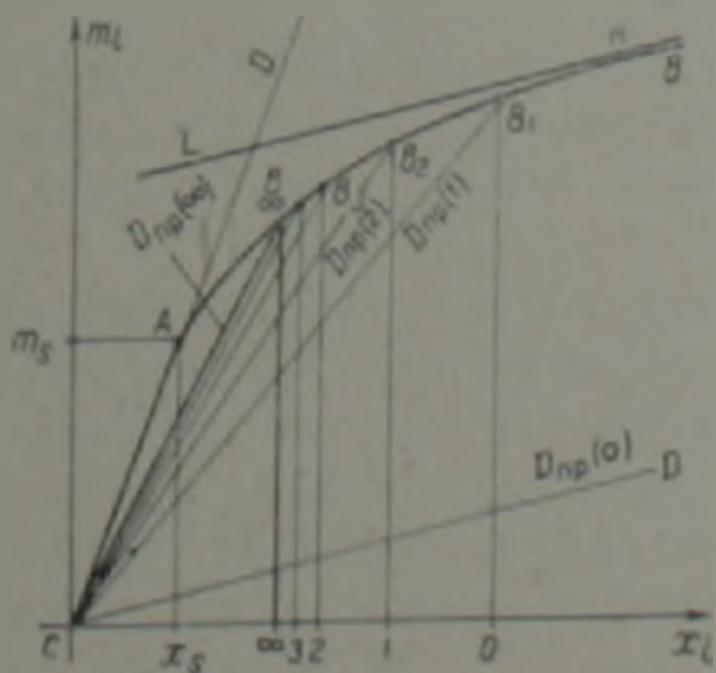


Рис. 2. Определение приведенной жесткости сечения пластинки

левое приближение по действительной диаграмме $m_i \sim \chi_i$ (кривая $CA'B$), можно определить нулевое приближение максимальной интенсивности

моментов $m_{i\max}(0)$ — отрезок OB_1 . Соединяя точку B_1 с началом координат C , находим первое приближение приведенной жесткости $D^{\min}(1) = OB_1CO$. Далее, решая упругую задачу по диаграмме CB_1 , определяем первое приближение максимальной интенсивности кривизны $\chi_{i\max}(1)$. Оно изображено цифрой 1 на оси χ_i . Первое приближение $m_{i\max}(1)$ получается путем пересечения с действительной диаграммой CAB линии $1B_1$, параллельной оси m_i . Аналогично строятся и последующие приближения. Так как последовательность минимальных жесткостей $D^{\min}(n)$ монотонно растет и ограничена сверху значением действительной цилиндрической жесткости пластинки D , то она сходится. Предельное значение $D^{\min}(\infty) = D^*$ характеризуется тем, что для него значения максимальной интенсивности моментов $m_{i\max}(\infty) = m_i^*$, подсчитанные по приведенной диаграмме CB_1 и по действительной диаграмме CAB , совпадают. На основе этого D^* можно определить непосредственно, не связываясь с описанным выше процессом последовательных приближений. Пусть решена задача упругого изгиба пластинки. Определяется максимальная интенсивность кривизны как функция от неизвестной жесткости $\chi_{i\max}(D^*)$. Приравняв значения интенсивности моментов, подсчитанные для $\chi_{i\max}(D^*)$ по соотношению упругой пластинки с жесткостью D^* и по соотношению реальной упруго-пластической пластинки (1.1), получим:

$$D^* = D \left\{ 1 - \lambda \left[1 - \frac{9\epsilon_s}{4h\chi_{i\max}(D^*)} - \frac{27\epsilon_s^2}{16h^2\chi_{i\max}^2(D^*)} \right] \right\}. \quad (1.10)$$

Это и есть уравнение для определения D^* . Максимальные значения прогибов и напряжений упругой пластинки с однородной жесткостью D^* будут служить в качестве верхних оценок для действительных значений соответствующих величин реальной упруго-пластической пластинки.

По мере возрастания неоднородности напряженно-деформированного состояния и возрастания пластических свойств материала расхождения между оценками и действительными значениями будут увеличиваться.

Важно заметить, что с ростом пластических деформаций материал приближается к несжимаемому и его коэффициент поперечной деформации стремится к половине. Предлагаемые оценки получены в предположении о неизменности коэффициента Пуассона. Это приводит к искусственному уменьшению жесткости пластинки, а следовательно и к завышению деформаций. Оценки от этого становятся несколько грубыми.

Так как в теории поперечного изгиба однородных пластин как изгибающие моменты, так и их интенсивность m_i не зависят от жесткости пластинки, то нижнюю оценку минимальной жесткости D^* можно определить и следующим простым образом. Из упругого решения задачи определяется максимальное значение интенсивности

моментов M_{max} , это значение откладывается вдоль оси m , и проводится линия, параллельная оси x_1 , до пересечения с действительной диаграммой $m_1 \sim x_1$ упруго-пластической пластинки в точке A (рис. 1). Угловый коэффициент линии OA будет равняться искомому значению нижней оценки минимальной жесткости D^* .

Тот факт, что для однородных упругих пластин интенсивность изгибающих моментов прямо пропорциональна параметру нагрузки q , показывает, что несущая способность произвольной идеально-пластической пластинки ограничена снизу единым неравенством

$$q_{op} > 1,5 q_1 \quad (1.11)$$

где q_1 — то значение параметра нагрузки, при котором в какой-то точке (или точках) пластинки впервые достигается предел упругости материала. Например, в случае круглой защемленной по контуру пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, $q_{op} = 1,828 q_1$ (2) и нижняя оценка несущей способности (1.11) отличается от точной не более чем на 18 %.

2. Рассмотрим задачу определения верхней оценки для максимального прогиба шарнирно-опертой по контуру круглой пластинки, изгибаемой под действием равномерно распределенной нагрузки. В случае значения параметра упрочнения $\nu = 0,95$ и несжимаемости материала уравнение (1.10) принимает вид:

$$\frac{D^*}{D} = \begin{cases} 1, & \bar{q} = \frac{q h a^2}{2 \epsilon_1 D} \leq \bar{q}_1 = 3,429 \\ 0,05 + 4,886 \frac{1}{\bar{q}} - 19,144 \frac{1}{\bar{q}^2}, & \bar{q} \geq \bar{q}_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты некоторых расчетов, выполненных с помощью (2.1). В последней строке приведены отношения верхних оценок w^{*u} максимальных прогибов упруго-пластической пластинки к максимальным прогибам упругой пластинки w^e .

\bar{q}	3.429	4	5	6	7	8
D^* / D	1	0.972	0.874	0.776	0.692	0.623
$\frac{w^{*u}}{w^e} = \frac{D}{D^*}$	1	1.029	1.144	1.289	1.445	1.604

Из точного решения задачи упруго-пластического изгиба, когда в центре пластинки пластическая зона деформаций достигает половины толщины, имеем ((1), стр. 222)

$$\bar{q} = 5, \quad \frac{w^{*u}}{w^e} = \frac{0,399}{0,286} = 1,426. \quad (2.2)$$

В данном случае верхняя оценка максимального прогиба $\alpha^{00}/\alpha^0 = 1.114$ отличается от точного значения (2.2) менее чем на 1,6 %.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Առաձգա-պլաստիկական սալերի ճկվածքների և լարումների վերին գնահատականների մասին

Հենվելով առաձգական սալերի ծուխի խնդիրների հայտնի լուծումների վրա, առաջարկվում է առաձգա-պլաստիկական սալերի ճկվածքների և լարումների վերին սահմանների որոշման եղանակ: Սալի հաստությամբ լարվածադեֆորմացիոն վիճակի անհամասեռությունից ազատվելու նպատակով նախօրոք մտցվում են ծող մոմենտների և կորությունների ինտենսիվությունների գաղափարը, որոնք հանդիսանում են շոշափող լարումների և սահրի դեֆորմացիաների ինտենսիվությունների անալոզները:

Պարզության համար վերին գնահատականների որոշման առաջարկվող եզանակը ցուցադրվում է գծայնորեն ամրապնդվող նյութից պատրաստված սալերի համար: Ստացված գնահատականների հիման վրա իդեալական պլաստիկական սալերի կրող ունակության համար առաջարկվում է միասնական ներքին սահման: Դիտարկվում է մաքսիմալ ճկվածքների ճշգրիտ արժեքները վերին գնահատականների հետ համեմատելու կոնկրետ օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

А. А. Мильшин, Пластичность, Гостехиздат, М.—Л., 1948. ? Ф. Ходж, Пластический анализ конструкции, «Мир», М., 1965.