

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

Л. З. Геворкян

Функциональная модель для некоторого класса несамосопряженных операторов

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрином 29/1 1980)

Пусть H — гильбертово пространство, A — ограниченный оператор в H , $B(H)$ — алгебра всех ограниченных операторов в H , $\mathcal{A}$ — равномерно замкнутая подалгебра с единицей алгебры $B(H)$, порожденная оператором A , и ξ — циклический вектор оператора A .

Обозначим через ρ отображение A в H , определяемое формулой

$$\rho(B)\xi = B\xi.$$

Можно доказать, что ρ является инъективным отображением. Обозначим через M образ $\mathcal{A}$ при отображении ρ . Алгебраическую структуру подалгебры $\mathcal{A}$ при помощи отображения ρ перенесем в M , т. е. определим произведение двух элементов $x, y \in M$ по формуле

$$x \cdot y = BC\xi \quad (x = B\xi, \quad y = C\xi).$$

Легко видеть, что действие некоторого оператора $D \in \mathcal{A}$ на какой-то элемент $z \in M$ сводится к умножению элемента $D\xi$, соответствующего D и z .

Отметим, что M инвариантно относительно любого оператора $D \in \mathcal{A}$.

Введем в M новую норму по формуле

$$|x| = |B|.$$

Легко видеть, что это определение, в силу инъективности ρ , корректно. Таким образом, M превращается в коммутативную банахову алгебру с единицей, причем роль единицы играет элемент ξ . (Фактически, M реализует регулярное представление алгебры $\mathcal{A}$ ⁽¹⁾).

В силу того, что оператор A обладает циклическим вектором, множество M всюду плотно в H , причем норма $|\cdot|$ мажорирует гильбертову норму $\|\cdot\|$

$$|x| \leq \|B\| \cdot \|\xi\| = \|x\| \cdot \|\xi\|.$$

Отсюда следует включение

$$M \subset H \subset M^*,$$

где M^* — сопряженное пространство к M .

Определение. Элемент $\varphi \in M^*$ называется собственным функционалом оператора A^* с собственным значением, равным λ , если для всех $x \in M$

$$(Ax, \varphi) = \lambda(x, \varphi).$$

Заметим, что если $\varphi \in H$, т. е. φ непрерывен также относительно нормы $\|\cdot\|$, то он просто является собственным вектором оператора A^* .

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $\|\xi\| = 1$, а собственные функционалы φ_λ нормированы условием $(\xi, \varphi_\lambda) = 1$ ($(\xi, \varphi_\lambda) \neq 0$, если $\varphi_\lambda \neq 0$).

Основная теорема. Множество собственных функционалов оператора A^* и множество линейных мультипликативных функционалов над алгеброй M совпадают.

Доказательство этой теоремы опирается на глубокую теорему Глисона, Кахана, Желязко⁽²⁾, характеризующую мультипликативные функционалы над произвольной банаховой алгеброй, а именно:

если φ такой функционал над банаховой алгеброй M , что $(\xi, \varphi) = 1$ и $(x, \varphi) \neq 0$ для каждого обратимого элемента $x \in M$, то φ непрерывен и мультипликативен.

Доказывается, что оператор A^* простой, т. е. каждому значению λ соответствует только один собственный функционал φ_λ .

Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие функцию $\bar{x}(\lambda)$

$$\bar{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda).$$

Можно доказать, что $\bar{x}(\cdot)$ есть не что иное, как преобразование Гельфанда элемента $x \in M$. Предположим теперь, что алгебра A полупростая. Это равносильно тому, что для любого элемента $x \in M$ существует собственный функционал φ такой, что $(x, \varphi) \neq 0$. В этом случае, как известно, преобразование Гельфанда инъективно.

Обозначим через $\bar{M}$ образ алгебры M при преобразовании Гельфанда. Определим скалярное произведение в $\bar{M}$ по формуле

$$(\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot))_{\bar{M}} = (x, y)_M.$$

Обозначим через $\bar{H}$ пополнение $\bar{M}$ по этому скалярному произведению. Преобразование Гельфанда, определенное лишь на всюду плотном множестве M , продолжается до изометрического оператора $G: H \rightarrow \bar{H}$, а оператору A соответствует оператор умножения на независимую переменную в пространстве $\bar{H}$.

Пространство представления $\bar{H}$ наряду с обычными функциями

будет содержать также предельные элементы, которые могут трактоваться как обобщенные функции.

Пример 1. Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром. Как хорошо известно ⁽¹⁾, равномерно замкнутая подалгебра, порожденная оператором A , изометрически изоморфна алгебре всех непрерывных функций на спектре оператора A . Оказывается, что соответствующее скалярное произведение можно задать при помощи некоторой меры μ и пополнение алгебры непрерывных функций по этой мере является пространством представления. Таким образом, мы получаем каноническое представление самосопряженного оператора.

Пример 2. Пусть U оператор одностороннего сдвига. В этом случае, как доказали Шилдс и Уоллен ⁽²⁾, равномерно замкнутая подалгебра, порожденная оператором U , изометрически изоморфна алгебре аналитических в открытом и непрерывных в замкнутом единичном круге функций. Пополнение этой алгебры по соответствующему скалярному произведению приводит к классу Харди H^2 .

Вышеприведенные примеры хорошо известны. Следующий пример показывает, что описанная выше конструкция является существенным обобщением этих классических результатов.

Пример 3. Пусть A оператор в пространстве $L^2(0, 1)$, определяемый формулой

$$(Af)(x) = xf(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt.$$

Собственные функции сопряженного оператора имеют вид

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\psi(\lambda - x)}{(\lambda - x)^{1/2}}, \quad \text{где } \psi(x) \text{ — функция Хевисайда.}$$

Эти функции не принадлежат пространству $L^2(0, 1)$ и должны рассматриваться как собственные функционалы.

Обозначим через H образ пространства L^2 при отображении

$$(J^{1/2}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1/2}}.$$

Введем в пространстве образов скалярное произведение

$$(f, g)_- = (J^{-1/2}f, J^{-1/2}g)_H.$$

Пользуясь теоремой Фубини, легко можно доказать, что при этом оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную в пространстве H .

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Որոշ դասի ոչ ինֆեանամալում օպերատորների ֆունկցիոնալ մոդելը

Դիցուք A -ն սահմանափակ օպերատոր է l_1 հիլբերտյան տարածությունում, օժտված ցիկլիկ վեկտորով և այնպիսին, որ նրա ծնած հավասարաչափ փակ հանրահաշիվը կիսապարզ է: Ցույց է տրված, որ այդ դեպքում A -ն կարելի է ներկայացնել որպես անկախ փոփոխականով բաղմապատկման օպերատոր՝ ընդհանրացված ֆունկցիաներ սլարունակող տարածությունում:

Այդ տեսանկյունից քննարկված է երկու դասական օրինակ:

Քննարկված է նաև մեկ օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ առաջարկված թեորեմը հանդիսանում է հայտնի արդյունքների էական ընդհանրացում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Т Р Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968. ² У. Рудин, Функциональный анализ, «Мир», М., 1975. ³ А. Shields, L. Wallen, Ind. Univ. Math. J., vol. 20 (1971).