ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 4

УДК 517.956

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Айрапетян

О слабой L^2-корректности смешанных задач для гиперболических систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21.I.1980)

Исследованию L^2-корректности смешанных задач для гиперболических систем первого порядка посвящен ряд работ [1-7]. Что же касается условий C^∞-корректности, то они были получены Р. Хершем [8] для однородной системы, гиперболической в смысле Гординга, причем коэффициенты, входящие в уравнения и граничные условия, предполагались постоянными. Позднее, в работе [9], К. Касахара уточнил доказательство Р. Херша и перенес его результат на неоднородные системы (с младшими членами). Исследованию необходимых условий C^∞-корректности для систем с переменными коэффициентами посвящена работа К. Кажитани [10].

В предлагаемой заметке рассмотрена смешанная задача для однородной системы первого порядка, гиперболической в смысле Гординга. Доказана достаточность условий Р. Херша и К. Касахара для слабой C^∞-корректности, когда элементы граничной матрицы являются гладкими функциями. В доказательстве используются идея редукции смешанной задачи к задаче на границе, описанная в работах [11,12] для волнового уравнения, и методы работ [8,9].

1°. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_0\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j\frac{\partial u}{\partial y_j} \quad \text{при } t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}, \tag{1}$$

$$B(t, y)u = g(t, y) \quad \text{при } t\geq 0,\ x=0,\ y\in R^{n-1}, \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{при } t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}, \tag{3}$$

где $u(t, x, y)$, $g(t, y)$ — комплекснозначные вектор-функции размерностей m и p; A_j ($j=0, 1, \ldots, n-1$) — комплекснозначные матрицы размера $m\times m$ с постоянными коэффициентами; $B(t, y)$ — комплекснозначная матрица размера $p\times m$, элементы которой бесконечно дифференцируемые функции, определенные в R^n и постоянные вне некоторого компакта.

Система (1) предполагается гиперболической по Гордингу, т. е.

Условие I. Корни уравнения

$$\det\left(\zeta I - iA_0\xi - i\sum_{j=1}^{n-1} A_j\eta_j\right) = 0 \tag{4}$$

чисто мнимые, т. е. $\operatorname{Re}\zeta = 0$ для $\xi\in R^1$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})\in R^{n-1}$.

Далее, предполагается

Условие II.

$$\det A_0 \neq 0, \tag{5}$$

что означает нехарактеристичность гиперплоскости $x = 0$.

Из гиперболичности системы (1) следует, что собственные значения матрицы A_0 вещественны, а из условия II — что они отличны от нуля. Пусть число отрицательных собственных значений матрицы A_0 равно μ_1 (с учетом кратностей). Для корректной постановки задачи необходимо, чтобы $\mu = \mu_1$, что и будет предполагаться.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие линейные пространства вектор-функций (здесь и всюду дальше) $0\leqslant s<\infty$, $\gamma>0$, $p = 0, 1, \ldots$,

$$\Gamma = \{(t, 0, y);\ t\in R^1,\ y\in R^{n-1}\},\quad \Gamma_+ = \{(t, 0, y);\ t>0\ y\in R^{n-1}\},$$

$$\Omega = \{(t, x, y);\ t\in R^1,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\},\quad \Omega_+ = \{(t, x, y);\ t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\}).$$

1) Пространство $H^{\mu}_{s,\gamma}(\Gamma)$, получаемое пополнением пространства $C_0^\infty(\Gamma)\times\ldots\times C_0^\infty(\Gamma)$ (μ раз) по норме

$$\langle u(t, y)\rangle_{s,\gamma} = \left(\sum_{l=1}^{\mu}\int (1+|\zeta|^2+|\eta|^2)^s|\hat u_l(\zeta, \eta)|^2 d\sigma d\eta\right)^{1/2},$$

где $\zeta = \gamma+i\sigma$, а $\hat u$ — преобразование Фурье — Лапласа функции u

$$\hat u(\zeta, \eta) = F_{\sigma,\eta}(\exp[-\gamma t]u). \tag{6}$$

2) Пространство $H^m_{p,\gamma}(\Omega)$, получаемое пополнением пространства $C_0^\infty(\overline{\Omega})\times\ldots\times C_0^\infty(\overline{\Omega})$ (m раз) по норме

$$|u(t, x, y)|_{p,\gamma} = \left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\int_0^\infty \left\langle\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_l(t, x, y)\right\rangle^2_{p-k,\gamma}dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $\bar u$ обозначает продолжение нулем при $t<0$ функции u.

3) Пространство $H^{\mu}_{p,\gamma}(\Gamma_+)$ состоит из элементов u таких, что $\bar u\in H^{\mu}_{p,\gamma}(\Gamma)$, с нормой

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{p,\gamma} = \langle\bar u\rangle_{p,\gamma}.$$

4) Аналогично, пространство $H^m_{p,\gamma}(\Omega_+)$ состоит из элементов u таких, что $\bar u\in H^m_{p,\gamma}(\Omega)$, с нормой

$$|u|_{p,\gamma} = |\bar{u}|_{p,\gamma}.$$

Систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n-1}{}' A_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right)u \tag{7}$$

Продолжив u нулем при $t<0$ и преобразуя (7) с помощью преобразования Фурье — Лапласа (6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx}\hat{u}(\tau, x, \eta) = M(\tau, \eta)\hat{u}(\tau, x, \eta), \tag{8}$$

где

$$M(\tau, \eta) = A_0^{-1}\left(\tau I - i\sum_{j=1}^{n-1}{}' A_j\eta_j\right), \quad \tau = \xi + i\sigma,\ \xi > 0. \tag{9}$$

Пусть $\omega = \{(\tau, \eta);\ \tau = \xi + i\sigma,\ \xi \geqslant c_0 > 0,\ \sigma \in R^1,\ \eta \in R^{n-1}\}$.

Из гиперболичности системы (1) следует, что матрица $M(\tau, \eta)$ не имеет чисто мнимых собственных значений ни при каких $(\tau, \eta) \in \omega$. Следовательно, число собственных значений с отрицательной вещественной частью постоянно для всех $(\tau, \eta) \in \omega$ (с учетом кратностей).

Для $(\tau, \eta) \in \omega$ через $E_-(\tau, \eta)$ обозначим собственное подпространство пространства C^n, соответствующее собственным значениям матрицы $M(\tau, \eta)$ с отрицательной вещественной частью. Очевидно, что размерность подпространства $E_-(\tau, \eta)$ равна μ.

2. Достаточным для слабой L^2-корректности является следующее

Условие III. Для $(\tau, \eta) \in \omega$, $(t, y) \in R^n$

$$C^n = \operatorname{Ker} B(t, y) \dotplus E_-(\tau, \eta), \tag{10}$$

где $\dotplus$ понимается как прямая сумма линейных подпространств.

Имеет место следующая

Теорема. *При выполнении условий* I—III *существуют положительные постоянные k и γ_0 такие, что для $\gamma > \gamma_0$ и $g \in H^1_{p+k,\gamma}(\Gamma_+)$ задача* (1)—(3) *имеет единственное решение $u \in H^n_{p,\gamma}(\Omega_+)$, для которого выполняется оценка*

$$|u|_{p,\gamma} \leqslant \mathrm{const}\, \langle g \rangle_{p+k,\gamma}. \tag{11}$$

Замечание. Предположение $g \in H^1_{p+k,\gamma}(\Gamma_+)$ содержит в себе выполнение условий согласования (C_{p+k}) для задачи (1)—(3).

Доказательство теоремы основано на использовании подхода, предложенного в работах М. Тсюжи [11] и М. Икава [12].

Пусть h — вектор размерности μ. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_0\frac{\partial v}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1}{}' A_j\frac{\partial v}{\partial y_j} \quad \text{при } t>0,\ x>0,\ y \in R^{n-1}, \tag{12}$$

$$B_0 v = h \qquad \text{при } t>0,\ x=0,\ y\in R^{n-1}, \tag{13}$$

$$v=0 \qquad \text{при } t=0,\ x>0, y\in R^{n-1}, \tag{14}$$

где $B_0=B(0,0)$.

Задача (12)—(14) имеет единственное решение $v\in H^m_{p,\gamma}(\Omega_+)$ для $\forall h\in H_{p+k}(\Gamma_+)$, где k—неотрицательное целое число (см., например, [6]).

Определим линейный оператор $L: H_{p+k,\gamma}(\Gamma_+)\to H_{p,\gamma}(\Gamma_+)$

$$L: h\to B(t,\ y)v|_{x=0}, \tag{15}$$

где v—решение задачи (12)—(14).

В доказательстве можно выделить два основных этапа:

1) построение оператора L;

2) доказательство однозначной разрешимости уравнения

$$Lh=g. \tag{16}$$

1) При построении оператора L используются результаты работы К. Касахара [9].

Продолжим h и g нулями при $t<0$. Тогда $g\in H_{p-k,\gamma}(\Gamma)$ для $\gamma>0$. Преобразуя (12) и (13) с помощью преобразования Фурье — Лапласа (6), получим задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx}\hat{v}(\tau,x,\eta)=M(\tau,\eta)\hat{v}(\tau,x,\eta) \text{ при } x>0, \tag{17}$$

$$B_0\hat{v}(\tau,0,\eta)=\hat{h}(\tau,\eta). \tag{18}$$

Рассмотрим эту задачу на пересечении ω со сферой $|\tau|^2+|\eta|^2=1$, где $\tau=\xi+i\sigma$. Как известно, общее решение системы (17) записывается в виде матричной экспоненты:

$$\hat{v}(\tau,x,\eta)=\exp[M(\tau,\eta)x]c(\tau,\eta). \tag{19}$$

Из (19) следует

$$B_0 c(\tau,\eta)=\hat{h}(\tau,\eta). \tag{20}$$

Так как для $(\tau,\eta)\in\omega$ решение (19) должно стремиться к нулю при $x\to+\infty$, ясно, что

$$c(\tau,\eta)\in E_-(\tau,\eta). \tag{21}$$

Пусть $v^1(\tau,\eta),\ldots,v^\mu(\tau,\eta)$—некоторый базис в $E_-(\tau,\eta)$, который, как показано в работе [9], может быть выбран так, чтобы $v^i_j(\tau,\eta)$ были голоморфны на пересечении $\omega\cap\{(\tau,\eta):|\tau|^2+|\eta|^2=1\}$ для $i=1,\ldots,\mu$; $j=1,\ldots,m$. Из условий (21), (20)

$$c(\tau,\eta)=Q(\tau,\eta)\hat{h}(\tau,\eta), \tag{22}$$

где

$$Q(\tau, \eta) = V(\tau, \eta)(B_0 V(\tau, \eta))^{-1}, \tag{23}$$

а V—матрица размеров $m \times \mu$, столбцами которой являются векторы $v^1, \ldots, v^m$. Учитывая однородность матрицы M по (τ, η), можно продолжить функции $v_j^i(\tau, \eta)$ на все ω по степени однородности 0. Тогда

$$|v_j^i(\tau, \eta)| \leqslant \text{const} \quad \forall (\tau, \eta) \in \omega; \ i = 1, \ldots, \mu; \ j = 1, \ldots, m, \tag{24}$$

$$\hat{v}(\tau, 0, \eta) = Q(\tau, \eta)\hat{h}(\tau, \eta), \ v(t, 0, y) = \exp[\xi t] F^{-1}[Q(\tau, \eta)\hat{h}(\tau, \eta)]. \tag{25}$$

Отсюда и из (15)

$$Lh = \exp[\xi t] F^{-1}[B(t, y) Q(\tau, \eta) F_{x,t}(\exp[-\xi t] \bar{h}(t, y))]. \tag{26}$$

Таким образом, оператор L является псевдодифференциальным оператором нулевого порядка, зависящим от параметра. Свойства таких операторов изучены в ряде работ (см., например, ([2,12])).

2) Однозначная разрешимость уравнения (16) для оператора (17) доказывается использованием техники регуляризаторов, аналогично тому, как это делается в работе М. С. Аграновича ([2]).

Из условия III

$$\det(B(t, y) Q(\tau, \eta)) \neq 0 \quad \forall (\tau, \eta) \in \omega, \ \forall (t, y) \in \Gamma. \tag{27}$$

Отсюда, используя однородность $Q(\tau, \eta)$ степени 0 по (τ, η) и то, что элементы матрицы $B(t, y)$ постоянные вне некоторого компакта, получаем

$$|\det B(t, y) Q(\tau, \eta)| \geqslant \text{const} \quad \forall (\tau, \eta) \in \omega, \ \forall (t, y) \in \Gamma.$$

Следовательно, элементы матрицы $(B(t, y) Q(\tau, \eta))^{-1}$ также ограничены постоянной на $\omega \times \Gamma$.

Положим

$$Rh = \exp[\xi t] F^{-1}[(B(t, y) Q(\tau, \eta))^{-1} F_{x,t}(\exp[-\xi t] h(t, y))]$$

Тогда, (см., например, ([2])).

$$RL = I + T, \tag{28}$$

причем для любого s и $h \in H^s_{\xi,\xi}(\Gamma)$

$$\xi \langle Th \rangle_{s,\xi} \leqslant \langle Th \rangle_{s+1,\xi} \leqslant C_s \langle h \rangle_{s,\xi}. \tag{29}$$

Следовательно, существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для $\xi > \gamma_0$ существует $(I + T)^{-1}$ и имеет место оценки

$$\langle h \rangle_{s,\xi} \leqslant \text{const} \langle Rg \rangle_{s,\xi} \leqslant \text{const} \langle g \rangle_{s,\xi}. \tag{30}$$

Как уже указывалось, $g \in H^s_{0,\gamma}(\Gamma)$ для $\gamma > 0$. Зафиксирован g, из (30) получаем для $\xi > \gamma_0$

$$\langle h\rangle_{0,\xi}\leqslant \mathrm{const}\,\langle g\rangle_{0,\xi}=\left(\int\limits_0^{\infty}dt\int\limits_{R^{n-1}}|\exp[-\xi t]\,g(t,y)|^2dy\right)^{1/2}\leqslant C_g.$$

При любых α и β, $\alpha<\beta<0$, и для $\xi>\gamma_0$

$$\exp[-2\xi\beta]\int\limits_{\alpha}^{\beta}dt\int\limits_{R^{n-1}}|h(t,y)|^2dy\leqslant\int\limits_{\alpha}^{\beta}dt\int\limits_{R^{n-1}}|\exp[-\xi t]\,h(t,y)|^2dy\leqslant C_g.$$

Поэтому $h=0$ почти всюду при $t<0$ и при $\xi>\gamma_0$ выполняется оценка

$$\langle\!\langle h\rangle\!\rangle_{p,\gamma}\leqslant \mathrm{const}\,\langle\!\langle g\rangle\!\rangle_{p,\gamma}. \tag{31}$$

Как показано в работе (9), для $h\in H^{*}_{p+k,\gamma}(\Gamma)$ существует единственное решение $v\in H^{m}_{p,\gamma}(\Omega)$ задачи (12)—(14), причем имеет место представление решения:

$$v=\exp[\xi t]F^{-1}[\exp[M(\tau,\eta)x]\,P_-(\tau,\eta)\,Q(\tau,\eta)\,F_{t,\eta}(e^{-\xi t}\bar{h}(t,y))], \tag{32}$$

где $P_-(\tau,\eta)$—проектор на подпространство $E_-(\tau,\eta)$, и доказана оценка

$$|\exp[M(\tau,\eta)x]\,P_-(\tau,\eta)|\leqslant c(|\tau|^2+|\eta|^2)^a\quad(\tau,\eta)\in\omega, \tag{33}$$

a—некоторое рациональное число.

Отсюда

$$\|v\|_{p,\gamma}\leqslant \mathrm{const}\,\langle\!\langle h\rangle\!\rangle_{p+k,\gamma}. \tag{34}$$

Из предыдущего видно, что если h есть решение уравнения (16), то решение задачи (12)—(14) удовлетворяет задаче (1)—(3).

Таким образом, существование решения задачи (1)—(3) доказано. Из (30), (31) следуют оценка (11) и единственность решения.

3. Пример. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения. Коэффициенты, входящие в граничное условие, предполагаются комплексными.

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{j=1}^{n-1}u_{y_jy_j}=0\quad\text{при } t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}, \tag{35}$$

$$b_1(t,y)u_t+b_2(t,y)u_x+\sum_{j=1}^{n-1}b_{j+2}(t,y)u_{y_j}=g\ \text{ при } t>0,\ x=0,\ y\in R^{n-1}, \tag{36}$$

$$u=0,\ u_t=0\quad\text{при } t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}. \tag{37}$$

Вводя обозначения: $u_t=v_1$, $u_x=v_2$, $u_{y_j}=v_{j+2}$ и

$$A_0=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&\\0&&I\end{pmatrix},\qquad {}^{t}B(t,y)=\begin{pmatrix}b_1(t,y)\\b_2(t,y)\\\vdots\\b_{n+1}(t,y)\end{pmatrix}$$

и обозначив $A_j=\|a^j_{lk}\|$ матрицу, у которой $a^j_{1,j+2}=1$, $a^j_{j+2,1}=1$, $a^j_{j+2,2}=-1$, а остальные элементы нули, $j=1,\ldots,n-1$; $l,k=1,\ldots,n+1$, запишем (35)—(37) в виде задачи для системы

$$V_t=A_0V_x+\sum_{j=1}^{n-1}A_jV_{y_j}\quad \text{при } t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1},\tag{38}$$

$$B(t,y)V=g(t,y)\quad \text{при } t>0,\ x=0,\ y\in R^{n-1},\tag{39}$$

$$V=0\quad \text{при } t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}.\tag{40}$$

Нетрудно проверить, что для системы (38) выполнены условия I и II, а условие III выглядит следующим образом ($\sqrt{\tau^2+|\gamma|^2}$ — корень с отрицательной вещественной частью):

$$b_2\sqrt{\tau^2+|\gamma|^2}+b_1\tau+i\sum_{j=1}^{n-1}b_{j+2}\gamma_j\neq0,\tag{41}$$

при $\gamma\in R^{n-1}$, $\tau=\xi+i\sigma$, $\xi>0$, $\sigma\in R^1$.

Условие (41) совпадает с условием Лопатинского для задачи (35)—(37).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Հիպերբոլական սիստեմների համար խառը խնդրի թույլ L^2—կոռեկտության մասին

Հոդվածում դիտարկված է խառը խնդիրը Գորդինգի իմաստով հիպերբոլիկ, առաջին կարգի, համասեռ սիստեմի համար։ Երբ եզրային մատրիցը հաստատուն չէ, ապացուցված է Ռ. Հերշի և Կ. Կասահարայի պայմանների բավարար լինելը թույլ L^2-կոռեկտության համար։ Ապացուցման մեջ օգտագործված է եզրի վրա դիտարկվող խնդիրն խառը խնդրի ռեդուկցիան, որը առաջարկված է Մ. Թսուժիի և Մ. Իկավայի աշխատանքներում։ Կիրառված է պարամետրից կախված պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների հաշիվը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. O. Kreiss*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 23 (1970) (Русский перевод Математика, т. 14, № 5 (1970). [2] *М. С. Агранович*, Матем. сб., т. 84, № 1 (1971). [3] *М. С. Агранович*, Функц. анализ и его приложения, т. 6, № 2 (1972). [4] *T. Shirota, T. Ohkubo*, Hokkaido Math. J., vol. 4, № 1 (1975). [5] *M. Ikawa*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., vol. 7, № 2 (1971). [6] *K. Kajitani*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., vol. 7, № 1 (1971). [7] *S. Osher*, Indiana Univ. Math. J., vol. 22, № 7 (1973). [8] *R. Hersh*, J. Math. and Mech., vol. 12, № 3 (1963). [9] *K. Kasahara*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., vol. 6, № 3 (1971). [10] *K. Kajitani*, J. Math. Kyoto Univ., vol. 14, № 2 (1974). [11] *M. Tsuji*, Proc. Jap. Acad., vol. 50, № 2 (1974). [12] *M. Ikawa*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., vol. 12, № 1 (1976). [13] *R. Sakamoto*, J. Math. Kyoto Univ., vol. 10, №2 (1970). Русский перевод Математика, т. 16, №1 (1972).