ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рафаелян

О базисности некоторых систем целых функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 18/I 1980)

Для любого $p(1<p<+\infty)$ и $\omega(-1<\omega<p-1)$ обозначим через $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ класс целых функций порядка $\rho(1<\rho<2)$ и типа σ $(0<\sigma<+\infty)$, для которых

$$\|f\|_{p,\omega}\overset{\mathrm{def}}{=}\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\theta_j})|^p r^{\omega}dr\right\}^{1/p}\leqslant M_f<+\infty, \tag{1}$$

где соответственно

$$\theta_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),\quad \theta_{3,4}=\pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right). \tag{2}$$

На основании ряда свойств функций класса $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$, анонсированных в заметке автора [1], нами установлены приводимые в данной заметке интерполяционные теоремы и теоремы о базисности специальных систем целых функций в указанных классах. Отметим при этом, что теоремы о базисах являются по существу дискретными аналогами лишь части известных результатов М. М. Джрбашяна в построенной им теории гармонического анализа на системах лучей в комплексной области (см. [2], гл. IV).

1. Рассмотрим функцию

$$S_\rho(z;\mu)=E_\rho(iz;\mu)-E_\rho(-iz;\mu), \tag{3}$$

где $\rho>1$, $\mu\in(-\infty,\infty)$;

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)} \tag{4}$$

целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1 при любом μ.

Нетрудно показать, что функция $S_\rho(z;\mu)$ допускает и представление

$$S_\rho(z;\mu)=2izE_{\rho/2}\left(-z^2;\ \mu+\frac{1}{\rho}\right) \tag{3'}$$

и поэтому также будет целой, порядка ρ и типа 1.

Следующие две леммы об асимптотическом поведении функции $S_\rho(z;\mu)$ и ее нулей следуюг из соответствующих известных результатов относительно функции $E_\rho(z;\mu)$ (см. ([3]), стр. 133—146).

Лемма 1. 1. *Пусть* $\rho>1$ *и* $\alpha\in(\pi/2\rho,\ \pi/\rho)$ — *любое. Тогда при* $|z|\to\infty$ *справедливы следующие асимптотические формулы*

а) *при* $\left|\arg z+\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha$

$$S_\rho(z;\mu)=\rho(iz)^{\rho(1-\mu)}e^{(iz)^\rho}+\frac{2i}{z\Gamma(\mu-1/\rho)}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right); \tag{5'}$$

б) *при* $\left|\arg z-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha$

$$S_\rho(z;\mu)=\rho(-iz)^{\rho(1-\mu)}e^{(-iz)^\rho}+\frac{2i}{z\Gamma(\mu-1/\rho)}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \tag{5''}$$

в) *при* $\left||\arg z|-\frac{\pi}{2}\right|\geqslant\alpha$

$$S_\rho(z;\mu)=\frac{2i}{z\Gamma(\mu-1/\rho)}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{6}$$

2. *Пусть* $\rho=1$ *и* $-1<\mu<2$, *тогда при* $x\to+\infty$

$$S_1(x;\mu)=2ix^{1-\mu}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\mu\right)+O\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{7}$$

Лемма 2. *Все достаточно большие по модулю нули* z_k *функции* $S_\rho(z;\mu)$ *простые, при этом*

1. *Если* $\rho>1$, *то при* $k\to\infty$

$$z_k=\exp\left\{\pm i(1\pm 1/\rho)\frac{\pi}{2}\right\}(2\pi k)^{1/\rho}\left[1+O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right]. \tag{8}$$

2. *Если* $\rho=1$ *и* $-1<\mu<2$, *то все нули* z_k *функции* $S_1(z;\mu)$ *с достаточно большим модулем лежат на вещественной оси* $(-\infty,\infty)$, *притом*

$$Z_k=\pi k\left[1+O\left(\frac{1}{|k|}\right)\right]. \tag{8'}$$

Асимптотическое поведение производной $S'_\rho(z;\mu)$ функции $S_\rho(z;\mu)$ на последовательности ее нулей $\{z_k\}$ дается в следующей лемме

Лемма 3. 1. *Если* $1<\rho<2$ *и* $\mu>0$, *то*

а) *при* $\operatorname{Im} z_k<0$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{(-iz_k)^{2-\rho}S'_\rho(z_k;\mu)\right\}=\frac{2\rho}{\Gamma(\mu-1/\rho)}; \tag{9'}$$

б) *при* $\operatorname{Im} z_k > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \left| (iz_k)^{2-\rho} S_\rho(z_k;\mu) \right| = \frac{2\rho}{\Gamma(\mu-1/\rho)}. \tag{9''}$$

2. *Если* $\rho=1$ *и* $-1<\mu<2$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \{(\pi k)^{\mu-1} S_1'(z_k;\mu)(-1)^k\} = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Из лемм 2 и 3 вытекает

Следствие. *Существуют постоянные* $C_\rho(\mu)>0$ *и* $N_\rho(\mu)\geq 1$, *не зависящие от* k, *и такие, что*

1) *Если* $1<\rho<2$ *и* $\mu>0$

$$|S_\rho'(z_k;\mu)| \geq C_\rho(\mu) k^{1-2/\rho} \quad k\geq N_\rho(\mu); \tag{11'}$$

2) *Если* $\rho=1$ *и* $-1<\mu<2$

$$|S_1'(z_k;\mu)| \geq C_1(\mu) k^{1-\mu} \qquad k\geq N_1(\mu). \tag{11''}$$

Доказательство приводимых ниже теорем существенно опирается на эти леммы.

II. Заметив, что точка $z=0$ является простым нулем функции $S_\rho(z;\mu)$, обозначим через $\{\lambda_n\}_0^\infty$, $\lambda_n=\lambda_n(\rho,\mu)$ последовательность в порядке неубывания их модулей

$$0=\lambda_0<|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq\cdots\leq|\lambda_n|\leq\cdots$$

с условием, что каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность.

Из леммы 1 вытекает, что

1) При $\rho=1$ и $\dfrac{1+\omega}{p}<\mu<2$

$$(z-\lambda_n)^{-1}S_1(\sigma z;\mu)\in W^{p,\omega}_{1,\sigma}; \tag{12}$$

2) При $\rho>1$ и $\mu=1+1/\rho$

$$(z-\lambda_n)^{-1}S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+1/\rho)\in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma} \tag{13}$$

$$z(z-\lambda_n)^{-1}S_\rho(\sigma^{1/\rho}z;\ 1+1/\rho)\in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$$

Обозначим теперь через $H_p[\alpha,\omega,\vartheta]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ множество аналитических в области угла

$$\Delta(\alpha,\vartheta)=\{z: |\arg z-\vartheta|<\pi/2\alpha,\quad 0<|z|<+\infty\},\quad (1/2<\alpha<+\infty)$$

функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{H_p} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{|\vartheta-\varphi|<\pi/2\alpha}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p r^\omega\, dr\right\} < +\infty. \tag{14}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. 1. *Пусть* $\rho>1$ *и* $\{\lambda_k\}_0^\infty$ — *множество всех нулей функции* $S_\rho(z; 1+1/\rho)$. *Тогда для любой функции* $f(z)\in H_p[\alpha, \omega, -\pi/2]$ $(1<\alpha<\rho)$

$$\sum_{|\lambda_k|\geq 1} |f(\lambda_k)|^p |\lambda_k|^{1+\omega-\rho} \leq M_p(\omega, \rho)\|f\|^p_{H_p}, \tag{15}$$

где $M_p(\omega, \rho)>0$ — *не зависит от* f.

2. *Пусть* $\rho=1$ *и* $\{\lambda_k\}_0^\infty$ — *множество всех нулей функции* $S_1(z;\mu)$ $(-1<\mu<2)$. *Тогда для любой функции* $F(z)$ *такой, что* $f(z)=F(z+i)\in H_p[1, \omega, -\pi/2]$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(\lambda_k)|^p|\lambda_k|^{\omega} \leq M_p(\omega, 1)\|f\|^p_{H_p}, \tag{15'}$$

где $M_p(\omega, 1)>0$ *не зависит от* f.

Пользуясь методом, предложенным в ряде работ М. М. Джрбашяна (см., например, [3]), приведем далее построение одной важной системы функций, ассоциированной с функцией $S_\rho(z;\mu)$ и с ее нулями.

С этой целью для любого $k(0\leq k<\infty)$ обозначим через $s_k\geq 1$ кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_n\}_0^k$ последовательности нулей функции $S_\rho(z;\mu)$, через p_k — кратность появления числа λ_k во всей последовательности $\{\lambda_n\}_0^\infty$. Очевидно, что $1\leq s_k\leq p_k<+\infty$ $(0\leq k<+\infty)$, причем в силу леммы 2 при достаточно большом $k_0\geq 0$ будем иметь $s_k=p_k=1$ $(k\geq k_0)$.

Обозначим

$$a_j(\lambda_k)=\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{S_\rho(z;\mu)}\right]\right\}_{z=\lambda_k} \quad (0\leq j\leq p_k-s_k,\ k\geq 0) \tag{16}$$

и введем в рассмотрение целые функции

$$\Omega_{k,\rho}(z;\mu)=\frac{S_\rho(z;\mu)}{(s_k-1)!(z-\lambda_k)^{p_k-s_k+1}}\sum_{j=0}^{p_k-s_k} a_j(\lambda_k)(z-\lambda_k)^j,\ (k\geq 0), \tag{17}$$

которые, как известно [3], удовлетворяют интерполяционным данным

$$\Omega_{k,\rho}^{(s_n-1)}(\lambda_n;\mu)=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases} \quad (n,\ k\geq 0). \tag{18}$$

Ввиду того, что при $k\geq k_0$ все нули функции $S_\rho(z;\mu)$ простые, из (16) и (17) следует, что

$$\Omega_{k,\rho}(z;\mu)=\frac{S_\rho(z;\mu)}{S'_\rho(\lambda_k;\mu)(z-\lambda_k)}, \qquad k\geq k_0. \tag{17'}$$

Наконец, введем в рассмотрение последовательность $\{\Phi_{k,\rho}(z)\}_0^\infty$ целых функций порядка $\rho(1\leq\rho<2)$ и типа $\sigma(0<\sigma<+\infty)$, положив при $\rho=1$

$$\Phi_{k,1}(z) = \Omega_{k,1}(\sigma z; \mu), \quad (0 \leq k < +\infty) \tag{19}$$

и при $1 < \rho < 2$

$$\Phi_{0,\rho}(z) = \Omega_{0,\rho}(\sigma^{1/\rho}; 1 + 1/\rho), \quad \Phi_{k,\rho}(z) = \lambda_k^{-1} z \Omega_{k,\rho}(\sigma^{1/\rho} z; 1 + 1/\rho), \ k \geq 1. \tag{20}$$

Ввиду свойств (12), (13) и формул (20) справедлива

Лемма 4. 1. *При* $\frac{1+\omega}{p} < \mu < 2$ $\Phi_{k,1}(z) \in W^{p,\omega}_{1,\sigma}$ $(k \geq 0)$.

2. *При* $1 < \rho < 2$ $\Phi_{k,\rho}(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$.

3. *При* $1 \leq \rho < 2$

$$\Phi^{(s_k - 1)}_{k,\rho}(\lambda_n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases} \quad (k, n \geq 0). \tag{21}$$

III. Пусть $(c_k)_0^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел, для которой ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_{k,\rho}(z) \tag{22}$$

равномерно сходится на любом компакте плоскости z. Тогда сумма ряда — $f(z)$ будет целой функцией и, как легко следует из свойства (21) системы $\{\Phi_{k,\rho}(z)\}$, удовлетворяет интерполяционным условиям

$$f^{(s_k - 1)}(\lambda_k) = c_k \quad (0 \leq k < +\infty). \tag{23}$$

Для формулировки основных теорем данной заметки нам следует ввести такое определение:

Пусть $l^p = l^{p,\omega}$ $(1 < p < +\infty, -1 < \omega < p - 1, \ 1 \leq \rho < 2)$ означает множество последовательностей комплексных чисел $\{c_k\}_0^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_k\}\|_{l^p} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^{\frac{1+\omega}{\rho} - 1} \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p - 1$ *и* $1 \leq \rho < 2$. *Кроме того положим, что при* $\rho = 1$ *в определении* (19) *параметр* $\mu \in \left(\frac{1+\omega}{p}, 1 + \frac{1+\omega}{p} \right)$. *Тогда*

1. *Для любого элемента* $\{c_k\} \in l^p_\rho$ *ряд* (22) *равномерно сходится на любом компакте, а также по норме* $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ *к некоторой функции* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$, *удовлетворяющей интерполяционным условиям* (23).

2. *Справедливы неравенства вида для норм*

$$m \|\{c_k\}\|_{l^p} \leq \| f \|_{p,\omega} \leq M \|\{c_k\}\|_{l^p}, \tag{25}$$

где $m > 0$ *и* $M > 0$ *не зависят от элемента* $\{c_k\} \in l^p$.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. *При тех же условиях на все параметры любая функция* $f(z)\in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ *разлагается в интерполяционный ряд вида*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(\mu_k-1)}(\lambda_k)\Phi_{\rho,k}(z), \tag{26}$$

сходящийся к ней на любом компакте и в метрике $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$.

В случае, когда $p=2$, из наших теорем, в частности, вытекает

Теорема 4. *При* $-1<\omega<1$, $1\leq\rho<2$ *и* $\frac{1+\omega}{2}<\mu<\frac{3}{2}+\frac{\omega}{2}$ (*когда* $\rho=1$) *система функций* $\{\Phi_{\rho,k}(z)\}_0^\infty$ *образует базис Рисса в классе* $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$.

IV. Согласно известной теореме М. М. Джрбашяна (см. ([2]), теорему 6. 13), которая в частном случае $\nu=\rho=1$ сводится к известной теореме *Винера — Пэли о целых функциях экспоненциального типа, класс* $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z)=\int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(iz\tau;\nu)\varphi(\tau)|\tau|^{\nu-1}d\tau, \tag{27}$$

где $\nu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ *и функция* $\varphi(\tau)|\tau|^{\frac{\rho-1}{2}}\in L_2(-\sigma^{1/\rho},\sigma^{1/\rho})$ — *произвольна.*

На основе этого результата следует, во-первых, что существует система функций $\{\psi_k(\tau)\}_0^\infty$, $\psi_k(\tau)\in L_{2,-\omega}(-\sigma^{1/\rho},\sigma^{1/\rho})$, биортогональная с системой

$$\{E_\rho^{(\mu_k-1)}(i\lambda_k\tau;\nu)(i\tau)^{\mu_k-1}\}_0^\infty,\quad \nu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho} \tag{28}$$

на $(-\sigma^{1/\rho},\sigma^{1/\rho})$, и, во-вторых, что в силу теоремы 4 система функций $\{\psi_k(\tau)\}_0^\infty$ образует базис Рисса в $L_{2,-\omega}(-\sigma^{1/\rho},\sigma^{1/\rho})$.

В силу этого факта и вновь на основе теоремы 4 устанавливается

Теорема 5. 1. *Система функций* (28) *в условиях теоремы* 4 *образует базис Рисса в* $L_{2,\omega}(-\sigma^{1/\rho},\sigma^{1/\rho})$.

2. *Если в* $L_{2,\omega}(-\sigma^{1/\rho},\sigma^{1/\rho})$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)E_\rho^{(\mu_k-1)}(i\lambda_k x;\nu)(ix)^{\mu_k-1}, \tag{29}$$

где

$$a_k(f)=\int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} f(t)\psi_k(t)dt\quad (k\geq 0), \tag{30}$$

то

$$r_1\|x^{-\omega}f(x)\|_{L_2}\leq\|\{c_k\}\|_{l_2}\leq r_2\|x^{\omega}f(x)\|_{L_2} \tag{31}$$

В заключение отметим, что в крайнем случае, когда $\rho = \nu = 1$, $\omega = 0$ и $\sigma = \pi$, теорема 3 сводится к известной интерполяционной теореме Коши — Котельникова и система (28) переходит в тригонометрическую систему $\{e^{i\lambda_k t}\}$.

В заключение приношу глубокую благодарность моему научному руководителю академику АН Арм. ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство.

Ереванский государственный
университет

Ս. Գ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ

Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների բազիսության մասին

Նշանակենք $W^{p,\omega}_{\sigma,\rho}$-ով $\rho\,(1\leqslant\rho<2)$ կարգ և σ $(0<\sigma<+\infty)$ տիպ ունեցող այն բոլոր ամբողջ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար

$$\|f\|_{p,\omega} = \max_{1\leqslant k\leqslant 2}\left\{\int_0^{+\infty} |f(ie^{i\theta_k} r)|^p r^{\omega}\, dr\right\}^{1/p} \leqslant M_f < +\infty$$

որտեղ՝

$$\theta_1 = +\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right), \quad \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

Հոդվածում լուծվում է մի ինտերպոլյացիայի խնդիր $W^{p,\omega}_{\sigma,\rho}$ դասում, ինչպես նաև այդ դասում կառուցվում է բազիս։ Օգտվելով այդ արդյունքներից, ինչպես նաև պարամետրական ներկայացման մասին Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի թեորեմից, ցույց է տրվում, որ ֆունկցիաների հետևյալ սիստեմը

$$\left\{E_\rho^{(\mu-1)}(i\lambda_k t;\mu)(it)^{\mu-1}\right\}_0^{+\infty}, \qquad \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$$

Ռիսի բազիս է $L_2(-\sigma^{1/\rho}, \sigma^{1/\rho})$ տարածության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Рафиелян*, ДАН АрмССР, т. 70, № 2 (1980). [2] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [3] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, матем., т. 9, № 5 (1974).