ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 4

УДК 513+14

МАТЕМАТИКА

Р. Ц. Мусаелян

Изометрические погружения в E^3 некоторых некомпактных областей в метриках отрицательной кривизны

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/VIII 1979)

1. Формулировка теоремы. В статье рассматривается вопрос о регулярных изометрических погружениях в E^3 некоторых классов выпуклых множеств в метриках переменной отрицательной кривизны. Исследуемые метрики представляют собой обобщение рассмотренного ранее случая метрик постоянной кривизны (см. [1]). При этом понятие выпуклого множества вводится обычным образом, с использованием геодезических линий данной метрики*.

Мы введем понятие бесконечных многоугольников в рассматриваемых метриках.

Оссерманом доказано (см. [2]), что полные двумерные метрики с кривизной, ограниченной сверху отрицательной константой, конформно отображаются на круг, границу которого по аналогии со случаем постоянной кривизны назовем абсолютно. Согласно этому результату геодезические в метрике переходят в кривые без самопересечений, соединяющие точки границы круга (бесконечно удаленные точки геодезических). При этом выпуклые области в метрике изображаются в круге с помощью областей того же типа, как и в круге при соответствующей интерпретации геометрии Лобачевского. Поэтому можно ввести понятие бесконечных многоугольников так же, как это сделано в статье [1]. В дальнейшем мы будем обращаться к отображению рассматриваемой метрики в круге, говоря при этом об образах геометрических объектов в этом круге. Например, мы будем говорить об образах геодезических в круге.

Выпуклое множество, состоящее из пересечения конечного или счетного множества полуплоскостей**, не имеющих общих точек, называется бесконечным многоугольником (БМ). Граница БМ состоит из

* Область D в метрике переменной отрицательной кривизны называется выпуклой, если отрезок геодезической, соединяющий любые две точки, принадлежащие D, целиком содержится в D.

** Часть полной метрики, ограниченную геодезической, будем называть полуплоскостью.

прямых (геодезических), которые назовем сторонами БМ. Две стороны называются соседними, если они параллельны*. Соседние стороны определяют бесконечно удаленную точку — вершину БМ. Все вершины БМ расположены на абсолюте.

Из множества всех тех БМ, у каждого из которых любая сторона имеет две соседние (в противоположных направлениях), выделим два множества M_1 и M_2.

Множество M_1 состоит из БМ, для каждого из которых можно указать такой отвечающий ему орицикл** O в заданной метрике, что нижняя грань длин ортогональных проекций (с помощью геодезических) сторон этого многоугольника на указанный орицикл положительна.

Множество M_2 в заданной метрике состоит из БМ, для каждого из которых точная нижняя грань длин ортогональных проекций сторон рассматриваемого многоугольника на одну из его сторон положительна.

Очевидно, БМ с конечным числом сторон, любая сторона которого имеет две соседних, входит и в M_1 и в M_2. Очевидно также, что существуют БМ, принадлежащие множеству M_1 и не принадлежащие множеству M_2 и наоборот.

Пусть полная метрика отрицательной кривизны задана в области $\Pi_0 = \{0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ в виде

$$dS^2 = dx^2 + [e^{-x} + b_1(y)]^2 dy^2. \tag{1}$$

Пусть далее кривизна метрики удовлетворяет условию

$$-k_2^2 \leq K(x, y) \leq -k_1^2 \neq 0,$$

где $k_1 \leq k_2$ положительные константы. Будем предполагать также, что функция $b_1(y)$ принадлежит классу $\overline{C}^{4,1}$*** на оси Oy.

Будем рассматривать также метрику отрицательной кривизны, заданной в полосе $\Pi_a = \{0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty\}$ в виде

$$dS^2 = dx^2 + [Chx + b_2(y)]^2 dy^2. \tag{2}$$

Пусть кривизна метрики удовлетворяет условию

$$-\varkappa_2^2 \leq K(x, y) \leq -\varkappa_1^2 \neq 0,$$

где $\varkappa_1 \leq \varkappa_2$ положительные константы.

Предположим также, что функция $b_2(y) \in \overline{C}^{4,1}$ на оси Oy. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *В метриках* (1) *и* (2) *любой многоугольник из*

---

* Геодезические в рассматриваемой метрике называются параллельными, если их образы в круге имеют единственную общую точку на абсолюте.

** Рассмотрим семейство геодезических линий, параллельных в одном направлении. Любая ортогональная траектория указанного семейства геодезических называется орициклом, а область, ограниченная орициклом, называется орикругом (см. [8]).

*** $\overline{C}^{4,1}$ — класс функций, заданных на всей прямой, ограниченных вместе с производными до 4-го порядка и точными константами Липшица для производных 4-го порядка.

класса M_1 или M_2 регулярно изометрически погружается в E^3 в виде поверхности класса $C^{2,1}$.

2. Вспомогательные утверждения. Известно, что при заданной первой квадратичной форме вторая квадратичная форма однозначно (с точностью до движения) определяет поверхность. Для отыскания коэффициентов $L(x, y)$, $M(x, y)$ и $N(x, y)$ второй квадратичной формы используются уравнения Петерсона—Кодацци и Гаусса, которые эквивалентны (при $r(x, y) \neq s(x, y)$) следующей системе квазилинейных уравнений гиперболического типа (см. [4,5]):

$$\begin{aligned} r_x(x, y) + s(x, y) \cdot r_y(x, y) = F_1(x, y, r, s) \\ s_x(x, y) + r(x, y) \cdot s_y(x, y) = F_2(x, y, r, s) \end{aligned} \right| \qquad (3)$$

в которых функции r, s—угловые коэффициенты образов асимптотических линий в параметрической плоскости xoy. F_1 и F_2 в системе (3) представляют собой многочлены от r и s с коэффициентами $A_i(x, y)$, которые вычисляются с помощью коэффициентов первой квадратичной формы заданной метрики.

Будем считать, что функции $A_i(x, y)$ заданы в полосе $\Pi_a = \{0 \leqslant x \leqslant a, \ -\infty < y < \infty\}$ ($a = \infty$ не исключается) и принадлежат в этой полосе классу $\bar{C}^{1,1}$*. Считаем также, что начальные данные $\{r_0(y), s_0(y)\} \in C^{1,1}$ на оси oy.

Теорема 2 (*существования и единственности*).

В некоторой полосе Π_{h_1}, $h_1 \leqslant a$ существует единственное решение $\{r(x,y), s(x,y)\} \in \bar{C}^{1,1}$ системы (3) с начальными данными $\{r_0, s_0\}$, принадлежащее классу $\bar{C}^{1,1}$. Для ширины h_1 этой полосы существует оценка снизу, зависящая от коэффициентов $A(x, y)$ и от начальных данных.

Доказательство этой теоремы см. в [5].

Лемма 1. *Пусть выполнены сформулированные в начале пункта условия и, кроме того, начальные данные $\{r_0, s_0\}$ на оси oy удовлетворяют неравенству*

$$0 < 2\delta \leqslant |r_0 - s_0|, \quad \delta = \text{const}.$$

Тогда в некоторой полосе Π_{h_2}, $h_2 \leqslant h_1$ (h_1—число, гарантированное теоремой существования и единственности) решение $\{r, s\}$ системы (3) удовлетворяет условию $\delta \leqslant |r - s|$.

Для ширины h_2 полосы Π_{h_2} может быть указана оценка снизу, зависящая от коэффициентов $A_i(x, y)$ системы (3) и от начальных данных.

Доказательство этой леммы приведено в [1].

---

* Принадлежность функции $A_i(x, y)$ классу $\bar{C}^{n,1}$ определяется в полной аналогии с предыдущим определением такого класса на оси oy.

Будем говорить, что эквидистанта* (Э) отсекает от БМ часть, содержащую вершину P этого многоугольника, если она пересекает соседние стороны БМ, определяющие P, и дуга эквидистанты (Э), заключенная между точками пересечения, содержится в БМ.

Аналогично вводится понятие отсечения части БМ, содержащей бесконечно удаленную вершину P посредством орицикла, и понятие дуги орицикла, отсекающей P.

Пусть БМ $\in M_1$, O -орицикл, отвечающий БМ, Q — бесконечно удаленная точка орицикла O. Можно доказывать следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть* БМ $\in M_1$ *и* h — *любое положительное число. Среди орициклов эквидистантных* O *найдется такой орицикл* O_1, *который отсекает все вершины* БМ, *причем, если* P_i — *любая вершина* БМ *и* a_i — *прямая, соединяющая* Q *с* P_i, *то эквидистантная полоса*** *с базой* a_i *и ширины* $2h$ *содержит часть* БМ, *отсеченную* O_1 *и содержащую* P_i.

Пусть теперь БМ $\in M_2$. Рассмотрим эквидистантные полосы (ЭП)$_\alpha$ с базой l и ширины 2α и те граничные эквидистанты Э$_\alpha$ этих полос, которые лежат по ту же сторону от l, что и БМ.

Лемма 3. *Пусть* БМ $\in M_2$ *и* h — *любое положительное число. Среди указанных выше эквидистант найдется такая эквидистанта* Э$_\alpha$, *которая отсекает все вершины* БМ, *причем, если* P_i — *любая не лежащая на* l *вершина* БМ *и* a_i — *прямая, проходящая через* P_i *и ортогональная* l, *то эквидистантная полоса с базой* a_i *и ширины* $2h$ *содержит часть* БМ, *отсеченную* Э$_\alpha$ *и содержащую* P_i.

С помощью вспомогательных утверждений может быть проведено доказательство теоремы, сформулированной в пункте 1. При этом план доказательства совпадает с планом доказательства основной теоремы в статье ([1]).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Э. Г. Позняку за постановку задачи и постоянное внимание к выполнению работы.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

---

* Эквидистанта — геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой (геодезической), которая называется базой.

** Пусть τ — прямая в рассматриваемой метрике. Множество точек, удаленных от τ не более чем на σ, называется эквидистантной полосой (ЭП) ширины 2σ с базой τ. Очевидно, граница (ЭП) — эквидистант с базой τ.

Ռ. Ս. ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

Բացասական կորության չափերում որոշ ոչ կոմպակտ տիրույթների իզոմետրիկ ընկղմելիությունը E^3

Աշխատանքում դիտարկված է տրված փոփոխական բացասական կորության չափերում, որոշ ոչ կոմպակտ ուռուցիկ տիրույթների ընկղմելիությունը E^3։ Այդպիսի տիրույթները այստեղ անվանում են անվերջ բազմանկյուններ։ Հաստատուն բացասական կորության չափերում այդպիսի բազմանկյունների ընկղմելիությունը ապացուցել է Է. Գ. Պոզնյակը։ Այս աշխատանքը վերոհիշյալ աշխատանքի ընդհանրացումն է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. Г. Позняк*, Мат. сборник, т. 102 (144), № 1 (1977). [2] *R. Osserman*, On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. Pacif. J. Math. 1957, 7, 1641—1647. [3] *Е. В. Шикин*, Изометрические погружения в некоторых областях неположительной кривизны. Докт. дис., М., 1976. [4] *Э. Г. Позняк*, ДАН СССР, т. 170, № 4 (1966). [5] *Э. Г. Позняк*, Укр. геометр. сборник, вып. 3, 1966.