УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

И. Г. Хачатрян

Об одной обратной задаче

(Представлено в журнал АН Армянской ССР Р. А. Александряном 24.1.1980)

В настоящей заметке приводятся результаты, которые относятся к спектральным свойствам действующего в пространстве $L_2(0, \infty)$ оператора L , порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[p_{n-1-k}(x) y^{(k)} \right]^{(k)}, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$y^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Для оператора L решается обратная задача, аналогичная обратной задаче теории рассеяния (см. (1)).

Лемма 1. Если коэффициенты дифференциального выражения (1) вещественнозначны и удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 x^{k+1} |p_k(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |p_k(x)| dx < c, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

то оператор L является самосопряженным (см. (2)).

Ниже на коэффициенты $p_k(x)$ накладываются более ограничительные условия, чем условия (3). А именно, предполагается, что коэффициенты вещественнозначны на полуоси $0 < x < \infty$, аналитически

продолжаются в сектор $D = \left\{ z; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \right\}$ и удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} x^{k+1} \left\{ \sup_{\rho \leq |z| \leq \rho+1} |p_k(z)| \right\} dx < \infty, \quad \nu, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

В работе автора (2) доказано, что при условиях (4) уравнение

$$l(y) = \lambda^n y \quad (5)$$

для всех значений параметра λ из полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ имеет решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \int_x^{\infty} e^{\lambda t} K(x, t) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (6)$$

при этом ядро $K(x, t)$ ($0 \leq x \leq t < \infty$) вещественнозначно и $K(x, t) = K_0(x, t - x)$, где функция $K_0(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) при каждом $\xi \geq 0$ регулярна по z в секторе D и удовлетворяет неравенству

$$|K_0(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} h(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}) \exp \left| h_1(\text{Re } z) - h_1\left(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}\right) \right|, \quad (7)$$

а монотонно убывающие функции $h(x)$ и $h_1(x)$ определяются по формулам

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)2^{k+1}}{(k+1)n \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^{k+1}} \int_x^{\infty} (u-x)^{k+1} \left\{ \sup_{\text{Re } z = u} |p_k(z)| \right\} du,$$

$$h_1(x) = \int_x^{\infty} h(u) du.$$

Очевидно, что $h_1(0) < \infty$. В силу неравенства (7) из формулы (6) следует, что имеет место также формула

$$e^{\lambda x} = y(x, \lambda) + \int_x^{\infty} y(t, \lambda) H(x, t) dt, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (8)$$

где ядро $H(x, t)$ ($0 \leq x \leq t < \infty$) удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(x, t) + K(x, t) + \int_x^t H(x, u) K(u, t) du = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $H(x, t) = H_0(x, t - x)$, где функции $H_0(z, \xi)$ ($z \in D; 0 \leq \xi < \infty$) при каждом $\xi \geq 0$ регулярна по z в секторе D и удовлетворяет неравенству

$$|H_0(z, \xi)| \leq \frac{1}{2} h\left(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}\right) \exp \left| 2h_1(\text{Re } z) - 2h_1\left(\text{Re } z + \frac{\xi}{2}\right) \right|.$$

Обозначим $\omega_k = \exp\left(i\pi \frac{k}{n}\right)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$) и при помощи

функции $y(x, \lambda)$ для значений $\lambda > 0$ введем следующие линейно независимые решения уравнения (5):

$$y_k(x, \lambda) = y(x, \lambda \omega_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

При каждом $x > 0$ функции $y_k^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, n-1$) регулярны по λ в секторе $-\frac{\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{n}$, а функции $y_0^{(\nu)}(x, \lambda)$ и $y_n^{(\nu)}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) регулярны в верхней и нижней полуплоскостях, соответственно. При $\lambda > 0$ составим матрицу $[y_k^{(\nu)}(0, \lambda)]$, содержащую n строк ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) и $n+1$ столбец ($k = 0, 1, \dots, n$). Обозначим через $\Delta_k(\lambda)$ ($0 \leq k \leq n$) минор порядка n этой матрицы, не содержащий ее $(k+1)$ -ый столбец. Определители $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta_n(\lambda)$ регулярны в секторах $-\frac{\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq 0$ и $0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{n}$, соответственно.

Лемма 2. Число $i_0^{2\pi/n}$ ($i_0 \neq 0, 0 \leq \arg i_0 \leq \frac{\pi}{n}$) является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $\Delta_n(i_0) = 0$.

Положим

$$S_k(\lambda) = (-1)^{n+k} \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Очевидно, что $S_n(\lambda) \equiv 1$.

Лемма 3. Функции $S_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и $S_0(\lambda)$ непрерывны во всех точках* $\lambda > 0$.

Имеют место соотношения

$$S_{n-k}(\lambda) = S_0(\lambda) \bar{S}_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и, в частности, $|S_0(\lambda)| \equiv 1$. Существуют конечные пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_k(\lambda) = S_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

причем числа S_k^0 могут быть построены по аналогии с $S_k(\lambda)$, исходя из уравнения $(-1)^n y^{2n} = \lambda^{2n} y$.

Введем следующее решение краевой задачи (5), (2):

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) y_k(x, \lambda), \quad \lambda > 0. \quad (9)$$

Теорема 1. Непрерывная часть спектра оператора L заполняет всю положительную полуось $\mu \geq 0$, а на отрицательной полуоси $\mu < 0$ могут находиться лишь собственные значения оператора L . Множество собственных значений ограничено и может иметь точкой сгущения только $\mu = 0$, причем $\mu = 0$ не является собственным значением. Кратность отрицательных собственных значений

* Аналогичное утверждение доказано в монографии И. М. Рапопорта (*) при условиях $p_k(x) \in L_1(0, \infty)$, однако нам удалось значительно упростить это доказательство и избежать громоздких вычислений.

не превосходит n , а кратность положительных собственных значений не превосходит $n-1$, кроме того, число отрицательных собственных значений кратности n и положительных собственных значений кратности $n-1$ конечно.

Пусть число λ_0^{2n} ($\lambda_0 > 0$ или $\arg \lambda_0 = \frac{\pi}{2n}$) является собственным значением кратности r оператора L , а $\{\varphi_k(x, \lambda_0)\}_{k=1}^r$ — соответствующая система ортонормированных собственных функций. Тогда функция

$$\Phi(x, t, \lambda_0) = \sum_{k=1}^r \varphi_k(x, \lambda_0) \bar{\varphi}_k(t, \lambda_0), \quad 0 \leq x, t < \infty,$$

не зависит от выбора системы $\{\varphi_k(x, \lambda_0)\}$ и представляется в виде

$$\Phi(x, t, \lambda_0) = \sum_{k,l=0}^{n-1} N_{kl}(\lambda_0) y_k(x, \lambda_0) \bar{y}_l(t, \lambda_0), \quad (10)$$

где матрица $[N_{kl}]$ является эрмитовой неотрицательной матрицей, ранг которой совпадает с кратностью r собственного значения λ_0^{2n} , причем в случае $\lambda_0 > 0$ имеют место соотношения

$$N_{k0} = N_{0k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$N_{k,n-j} = N_{j,n-k}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n-1,$$

а при $\arg \lambda_0 = \frac{\pi}{2n}$

$$N_{k,n-1-j} = N_{j,n-1-k}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Функция $\Phi(x, t, \lambda_0)$ вещественнозначна и симметрична, при этом интегральный оператор с ядром $\Phi(x, t, \lambda_0)$ является ортогональным проектором на собственное подпространство оператора L , соответствующее собственному значению λ_0^{2n} .

Обозначим через $\{\mu_v\}_{v=1}^m$ и $\{\bar{\mu}_v\}_{v=1}^s$ соответственно, последовательности положительных и отрицательных собственных значений оператора L , пронумерованных в порядке убывания модулей (не исключаются случаи $m=0$, $m=\infty$, $s=0$, $s=\infty$). Положим

$$\mu_v = \lambda_v^{2n}, \quad \lambda_v > 0, \quad v = 1, 2, \dots, m,$$

$$\bar{\mu}_v = \rho_v^{2n}, \quad \arg \rho_v = \frac{\pi}{2n}, \quad v = 1, 2, \dots, s.$$

Обозначим

$$R(x, t, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mu} u(x, \lambda) \bar{u}(t, \lambda) d\lambda, \quad \mu > 0,$$

и введем функцию

$$E_\mu(x, t) = \begin{cases} \sum_{\rho < \mu} \Phi(x, t, \rho), & \mu < 0, \\ \sum_{\rho > \mu} \Phi(x, t, \rho) + R(x, t, \mu^{\frac{1}{2n}}) + E_0(x, t), & \mu > 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Функция $E_\mu(x, t)$ непрерывна в области $0 \leq x, t < \infty$, вещественнозначна, симметрична и при каждом $x > 0$ по переменной t принадлежит классу $L_2(0, \infty)$. Кроме того, семейство интегральных операторов E_μ ($-\infty < \mu < \infty$) с ядрами $E_\mu(x, t)$ является разложением единицы оператора L .

Если для функции $g(x) \in L_2(0, \infty)$ положить

$$G_k(\lambda) = \int_0^\infty g(x) y_k(x, \lambda) dx, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

(интеграл сходится в смысле метрики в $L_2(0, \infty)$) и учесть формулы (9), (10), то, согласно теореме 2, имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) G_k(\lambda) \right|^2 d\lambda + \sum_{j=1}^m \sum_{k,j=1}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) G_k(\rho_j) \bar{G}_j(\rho_j) + \sum_{j=1}^l \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) G_k(\rho_j) \bar{G}_j(\rho_j).$$

Рассмотрим теперь следующую обратную задачу: восстановить оператор L по набору данных

$$\{S_k(\lambda)\}_{k=0}^{n-1}, \{\rho_j, |N_{kj}(\rho_j)|_{k,j=1}^{n-1}\}_{j=1}^m, \{\rho_j, |N_{kj}(\rho_j)|_{k,j=0}^{n-1}\}_{j=1}^l. \quad (11)$$

Эта задача при $n=1$ совпадает с обратной задачей теории рассеяния.

Введем функцию

$$F(x, t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k,j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) e^{i\rho_j x} \overline{e^{i\rho_j t}} + \sum_{j=1}^l \sum_{k,j=1}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) e^{i\rho_j x} \overline{e^{i\rho_j t}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{k,j=0}^n \left[S_k(\lambda) \bar{S}_j(\lambda) - S_k^0 \bar{S}_j^0 \right] e^{i\lambda x} \overline{e^{i\lambda t}} \right\} d\lambda.$$

Функция $F(x, t)$ ($0 \leq x, t < \infty$) вещественнозначна и симметрична.

Лемма 4. Имеет место формула (см. (8))

$$F(x, t) = H(x, t) + \int_0^\infty H(x, u) H(t, u) du, \quad 0 \leq x \leq t < \infty.$$

Из этой формулы следует, что при каждом $u \geq 0$ и $t \geq 0$ функ-

ция $F(z+u, z+t)$ по переменной x из полуоси $0 < x < \infty$ аналитически продолжается в сектор D и удовлетворяет неравенству

$$|F(z+u, z+t)| \leq \frac{1}{2} h \left(\operatorname{Re} z + \frac{u+t}{2} \right) \exp \left[2h_1(\operatorname{Re} z + u) + 2h_1(\operatorname{Re} z + t) \right]$$

Используя полученное неравенство, нетрудно убедиться, что при каждом $z \in D$ интегральный оператор с ядром $F(z+u, z+t)$ ($0 \leq u, t < \infty$) является вполне непрерывным в пространстве $L_p(0, \infty)$ при любом p ($1 \leq p < \infty$).

Сформулируем теперь основные результаты настоящей заметки.

Теорема 3. При каждом $x \geq 0$ функция $K(x, t)$ ($x \leq t < \infty$) (см. (6)) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_x^{\infty} K(x, u) F(u, t) du = 0,$$

причем это уравнение при каждом $x \geq 0$ имеет единственное решение в классе $L_1(x, \infty)$.

Последнее утверждение теоремы 3 доказывается при помощи следующей леммы (см. (3)).

Лемма 5. Пусть $g(x) \in L_1(0, \infty) \cap L_2(0, \infty)$ и

$$T_k(\rho) = \int_0^{\infty} g(x) e^{-\rho x} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

тогда, если

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k_j=0}^{n-1} N_{kj}(\rho_j) T_{k_j}(\rho_j) \bar{T}_j(\rho_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k_j=0}^{n-1} N_{kj}(\lambda_j) T_{k_j}(\lambda_j) \bar{T}_j(\lambda_j) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n S_k(\lambda) T_k(\lambda) \right|^2 d\lambda = 0,$$

то $g(x) = 0$ почти всюду.

Теорема 4. Коэффициенты дифференциального выражения (1), удовлетворяющие условиям (4), по набору данных (11) определяются однозначно.

Действительно, решение (6) однозначно определяет уравнение (5), и поскольку функция $F(x, t)$ непосредственно строится при помощи данных (11), то утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3.

Մի հակադարձ խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [p_{n-1-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = \mu y, \quad 0 < x < \infty,$$

$$y^{(v)}(0) = 0, \quad v = 0, 1, \dots, n-1,$$

որտեղ $p_k(x)$ գործակիցները իրական են $0 < x < \infty$ կիսառանցքի վրա. անալիտիկ շարունակվում են $|\arg z| < \pi/2 - \pi/2n$ անկյան մեջ և բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

$$\int_0^{\infty} x^{v-k+1} \left| \sup_{\operatorname{Re} z = x} |p_k(z)| \right| dx < \infty, \quad v, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Այդ եզրային խնդրի համար լուծվում է մի հակադարձ խնդիր, որն իր դրվածքով նման է ցրման տեսության հակադարձ խնդրին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. А. Марченко, Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, «Наукова думка», Киев, 1977. ² М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», М., 1969. ³ И. Г. Хачатрян, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., т. 14, № 6 (1979). ⁴ И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, Киев, 1954. ⁵ И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, № 4 (1951).