ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 3

УДК 517942

МАТЕМАТИКА

Г. Ю. Таманян

Уравнение Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/I 1980)

В этой работе мы предлагаем новый метод определения ширины лакун в спектре оператора Штурма—Лиувилля с периодическим потенциалом. Таким образом мы рассматриваем уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

с 1-периодической функцией $q(x)$. В дальнейшем станет ясно, каким еще условиям должен удовлетворять потенциал $q(x)$. Наш метод заключается в выписывании остатков в асимптотических рядах, в которые разлагаются два линейно независимых решения уравнения (1), рассматриваемого на интервале $[0,1]$, с последующим определением остатка целой функции $\Delta(\lambda) \pm 2$, нулями которой и являются концы лакун. Мы показываем, что уравнения $\Delta(\lambda) \pm 2 = 0$ можно разрешить и получить для ширины лакуны формулу, из которой можно получить главный член асимптотики ширины лакуны в явной форме.

Итак мы рассматриваем два решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным данным Коши: $y^{(j)}(0,\lambda) = \delta_j^i$, которые мы обозначаем соответственно через $C(x,\lambda)$ и $S(x,\lambda)$ и которые (см. [1], [2]) можно разложить в асимптотические ряды:

$$C(x,\lambda) \sim e^{i\lambda x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{\lambda^\nu} + e^{-i\lambda x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu c_\nu(x)}{\lambda^\nu}; \tag{2}$$

$$S(x,\lambda) \sim e^{i\lambda x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu(x)}{\lambda^\nu} + e^{-i\lambda x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu s_\nu(x)}{\lambda^\nu}. \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) означают, что для любого натурального N существуют функции $F_{N1}(x,\lambda)$ и $F_{N2}(x,\lambda)$ такие, что

$$C(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{1} e^{(-1)^k i\lambda x} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{c_{\nu k}(x)}{\lambda^\nu} + F_{N1}(x,\lambda); \tag{4}$$

$$S(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{1} e^{(-1)^l \lambda x} \sum_{k=2}^{N} \frac{s_{lk}(x)}{\lambda^k} + F_{N2}(x,\lambda).$$

Для коэффициентов $c_{lk}(x)$ и $s_{lk}(x)$ верны некоторые рекуррентные соотношения, и эти функции однозначно определяются исходя из начальных данных. Мы проведем все рассуждения для решения $C(x,\lambda)$, а для $S(x,\lambda)$ — все аналогично. Равенство (4) мы коротко запишем так:

$$C(x,\lambda) = L_N(x,\lambda) + F_{N1}(x,\lambda).$$

Несложный прямой подсчет приведет нас к факту: остаток $F_{N1}(x,\lambda)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$F''_{N1} + [\lambda^2 - q(x)]F_{N1} = \frac{e^{\lambda x} + (-1)^N e^{-\lambda x}}{2\lambda^N} c''_{N+1}(x) \tag{5}$$

с начальными условиями

$$F_{N1}(0,\lambda) = 0, \quad \frac{\partial F_{N1}(0,\lambda)}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Построив функцию Грина $G(x,\xi,\lambda)$ для оператора A, порожденного в $L_2(0,1)$ дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y - \lambda^2 y$ и начальными условиями (6), мы сумеем представить остаток в виде

$$F_{N1}(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\, f_{N1}(\xi,\lambda)\, d\xi,$$

где $f_{N1}(x,\lambda)$ есть правая часть уравнения (5).

Аналогичное представление справедливо и для $F_{N2}(x,\lambda)$. Таким образом, коль скоро нам известна некая информация относительно поведения функции $G(x,\xi,\lambda)$ по λ, столь скоро мы сможем знать поведение остатков $F_{N1}(x,\lambda)$ и $F_{N2}(x,\lambda)$ по λ, а как выяснится в дальнейшем, это является основной информацией, необходимой для получения ширины лакун. Итак дополнительные предположения относительно потенциала $q(x)$ в каждой конкретной ситуации вызваны необходимостью получения нужной информации относительно функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$. Целая функция $\Delta(\lambda)$, о которой мы уже упоминали, имеет вид

$$\Delta(\lambda) = C(1,\lambda) + S'(1,\lambda).$$

Поэтому, во-первых, ее можно разложить в асимптотический ряд

$$\Delta(\lambda) \sim e^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda^k} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k}{\lambda^k}$$

и, во-вторых, остаток этого ряда можно представить, очевидно, в виде

$$\Phi_N(\lambda) = F_{N1}(1, \lambda) + F_{N2}(1, \lambda).$$

Теперь нам надо решать следующие уравнения:

$$e^{i\lambda} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{a_\nu}{\lambda^\nu} + e^{-i\lambda} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\lambda^\nu} + \Phi_N(\lambda) = \pm 2. \tag{7}$$

Оба они решаются одинаково, и мы будем решать, для определенности, уравнение со знаком плюс в правой части. Его можно переписать в эквивалентной форме так:

$$e^{2i\lambda} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{a_\nu}{\lambda^\nu} + [\Phi_N(\lambda) - 2]\, e^{i\lambda} + \sum_{\nu=0}^{N} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\lambda^\nu} = 0. \tag{8}$$

Для краткости введем обозначения:

$$a = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{a_\nu}{\lambda^\nu}; \quad b = \Phi_N(\lambda) - 2; \quad c = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\lambda^\nu}.$$

Тогда, решая уравнение (8), получаем

$$e^{i\lambda} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \mathrm{E}_N^{\pm}(\lambda). \tag{9}$$

Но известен факт (см. ([3])), что две последовательности корней уравнений (9) обладают тем свойством, что каково бы ни было натуральное N, имеем разложения:

$$\lambda_{n1} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma_N}{n^{N+1}};$$

$$\lambda_{n2} = -n - c_0 - \frac{c_1}{n} - \ldots - \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma'_N}{n^{N+1}}.$$

Это коротко запишем так:

$$\lambda_{n1} = a_{n,N} + d_{n,N}; \tag{10}$$

$$\lambda_{n2} = -a_{n,N} + d'_{n,N}. \tag{11}$$

Через Δ_n обозначим ширину лакуны, концами которой являются числа λ_{n1}^2 и λ_{n2}^2.

Мы имеем

$$\Delta_n = |\lambda_{n1}^2 - \lambda_{n2}^2|$$

или, исходя из (9) и (10),

$$\Delta_n = |2a_{n,N}(d_{n,N} + d'_{n,N}) + (d_{n,N}^2 - d'^2_{n,N})|. \tag{12}$$

Подставив теперь в (9) выражения (10) и (11), имеем:

$$e^{id_{n,N}} = e^{-ia_{n,N}} \mathrm{E}_N^{+}(\lambda_{n1});$$

$$e^{id'_{n,N}} = e^{ia_{n,N}} \mathrm{E}_N^{-}(\lambda_{n2}).$$

Следовательно:

$$d_{n,N} = -a_{n,N} - i\ln|E_N^+(\lambda_{n1})|;$$

$$d'_{n,N} = a_{n,N} - i\ln|E_N^-(\lambda_{n2})|.$$

Подставляя эти выражения в (12), получаем окончательно

$$\Delta_n = |\ln^2|E_N^-(\lambda_{n2})| - \ln^2|E_N^+(\lambda_{n1})||. \qquad (13)$$

Аналогичную формулу получим и при решении уравнения (7) с минусом в правой части. Формула (13) — точная. Мы очевидно получим главный член асимптотики, если вместо λ_{n1} и λ_{n2} подставим в (13) их главные части. Обозначив через L оператор, порожденный (1) в $L_2(-\infty, \infty)$, мы можем сформулировать окончательно теорему:

Теорема. *Главный член асимптотики ширины n-ой лакуны в спектре оператора L дается формулой*

$$\Delta_n \simeq |\ln^2|E_N^-(-n)| - \ln^2|E_N^+(n)||.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Костюченко за постановку задач, внимание и помощь в работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Գ. ՅՈՒ. ԹԱՄԱՆՅԱՆ

Շտուրմ—Լիուվիլի հավասարումը պարբերական պոտենցիալով

Դիտարկվում է L օպերատորը, որը առաջանում է $L_2(-\infty, \infty)$ տարածության մեջ հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման հետևանքով՝

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \qquad -\infty < x < \infty,$$

որտեղ՝ q(x)—պարբերական ֆունկցիա է։
Առաջարկվում է նոր մեթոդ L օպերատորի սպեկտրում լակունայի երկարությունը որոշելու համար։ Մեթոդի նորությունը կայանում է ասիմպտոտիկ շարքերի մնացորդների որոշման մեջ։ Պարզված է Գրինի ֆունկցիայի դերը այդ հարցում։ Հոդվածում մենք ստանում ենք n-րդ լակունայի երկարության համար բանաձև, որը կարելի է կիրառել լակունայի ասիմպտոտիկան որոշելու համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Я. Д. Тамаркин.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. [2] *Х. М. Мкоян.* ДАН АрмССР, т. 60, № 1 (1975).