ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 3

УДК 514.765.7

МАТЕМАТИКА

В. А. Нерсесян

Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^5

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 17/I 1980)

1. Пусть K^n есть либо пространство R^n либо пространство C^n; $H_{k,n}$ — многообразие всех ориентированных k-мерных плоскостей в K^n; S — пространство бесконечно дифференцируемых функций в K^n, быстро убывающих вместе с производными до порядка $n-1$ включительно. Пусть $Q\in K^n$ и $f\in S$, а $\varphi(h)=\int\limits_h f(Q)dQ$, где $h\in H_{k,n}$. В работе ([1]) И. М. Гельфанд, М. И. Граев поставили новую задачу интегральной геометрии: восстановить $f(Q)$ по ограничению $\varphi(h)$ на некотором подмногообразии $K\subset H_{k,n}$ размерности n. Такие подмногообразия они назвали допустимыми комплексами. Там же описаны все допустимые комплексы прямых „общего положения" в C^n. Полное описание допустимых комплексов прямых в C^n дано К. Майусом ([2]), ([3]). В нашей работе рассматриваются допустимые комплексы (в том же смысле) двумерных плоскостей в R^5 и дается их геометрическая классификация.

2. В дальнейшем

$$i,j=\overline{1,n};\quad \alpha,\beta=\overline{5,n};\ a,b=1,2;\ N,L=\overline{1,4}.$$

К каждой плоскости $h\in H_{2,n}$ присоединим семейство ортонормированных реперов $\{M;\ e_i\}$ так, чтобы векторы e_a лежали в h. Уравнения инфинитезимального перемещения репера примут вид

$$dM=\omega^a e_a,\ de_N=\omega^i_N e_i,\ de_\alpha=\omega^i_\alpha e_i. \tag{1}$$

Главными на этом расслоении реперов $F(R^n)\to H_{2,n}$ являются формы

$$\omega^3,\ \omega^4,\ \omega^\alpha,\ \omega^3_a,\ \omega^4_a,\ \omega^\alpha_a. \tag{2}$$

Определение 1. Подмногообразие $K\subset H_{2,n}$ размерности n называется комплексом двумерных плоскостей в R^n, если через каждую точку $Q\in R^n$ проходит хотя бы одна плоскость $h\in K$.

Определение 2. Пусть $K \subset H_{2,n}$ комплекс двумерных плоскостей в R^n; K_Q — четырехмерный конус, образованный двумерными плоскостями, проходящими через точку $Q \in R^n$; $\pi(Q; h)$ — касательная плоскость к конусу K_Q, проходящая через $h \in K_Q$. Комплекс K называется допустимым, если для почти всех $Q \in R^n$ и $h \in K_Q$ плоскость $\pi(Q; h)$ определена и зависит только от h (другие эквивалентные определения см. в ([1] — [3])).

Пусть комплекс K допустим. В силу вложения $K \subset H_{2,n}$ формы (2) индуцируют на K некоторые формы, для которых мы сохраним прежние обозначения. Предположим, что среди форм из (2) линейно независимыми являются ω^3, ω^4, ω^α, ω_1^3, ω_2^4. Тогда

$$\omega_1^4 = A^4_{13}\omega^3 + A^4_{14}\omega^4 + A^4_{1\alpha}\omega^\alpha + A^{41}_{13}\omega_1^3 + A^{42}_{14}\omega_2^4; \tag{3}$$

$$\omega_2^3 = A^3_{23}\omega^3 + A^3_{24}\omega^4 + A^3_{2\alpha}\omega^\alpha + A^{31}_{23}\omega_1^3 + A^{32}_{24}\omega_2^4; \tag{4}$$

$$\omega_a^\alpha = A^\alpha_{a3}\omega^3 + A^\alpha_{a4}\omega^4 + A^\alpha_{a\beta}\omega^\beta + A^{\alpha 1}_{a3}\omega_1^3 + A^{\alpha 2}_{a4}\omega_2^4. \tag{5}$$

Зафиксируем плоскость $h \in K_Q$, точку Q и представим Q в виде $Q = M + x^a e_a$. Так как $dQ = 0$, то $\omega^a + dx^a + x^b\omega_b^a = 0$,

$$\omega^3 + x^a\omega_a^3 = 0, \quad \omega^4 + x^a\omega_a^4 = 0, \quad \omega^\alpha + x^a\omega_a^\alpha = 0. \tag{6}$$

Теперь возьмем произвольную точку $P \in h$ и представим ее в виде $P = M + y^a e_a$. Выделим в расслоении $F(R^n) \to H_{2,n}$ подрасслоение реперов так, чтобы $e_a \subset h$, а $e_A \subset \pi(Q,h)$. Так как $dP \in \pi(Q;h)$, то $\omega^\alpha + y^a\omega_a^\alpha = 0$ для любой точки $P \in h$ с учетом (6) или $\omega^\alpha = \omega_a^\alpha = 0$ в силу соотношений (6). По определению допустимого комплекса мы можем взять произвольные точки из h. Возьмем, скажем, точки $x^1 = x^2 = 0$ и $x^1 = 0$, $x^2 = 1$. Для них получим $A^{\alpha 1}_{a3} = A^{\alpha 2}_{a4} = A^\alpha_{a3} = A^\alpha_{a4} = 0$. Некоторые видоизменения будут и в соотношениях (3), (4), однако это в дальнейшем не существенно. Итак, если комплекс K допустим, то

$$\omega_a^\alpha = A^\alpha_{a\beta}\omega^\beta. \tag{7}$$

3. Рассмотрим случай $n = 5$. Тогда (7) примет вид

$$\omega_a^5 = A_a\omega^5, \tag{8}$$

где $A_a = A^5_{a5}$. Продифференцировав (8) внешним образом, получим

$$\Delta A_a \wedge \omega^5 + (\omega_a^3 - A_a\omega^3) \wedge \omega_3^5 + (\omega_a^4 - A_a\omega^4) \wedge \omega_4^5 = 0, \tag{9}$$

где $\Delta A_a = -dA_a + A_b\omega_a^b - A_a A_b\omega^b$.

а) Пусть формы ω^5, ω_3^5, ω_4^5 линейно независимы. Раскрывая (9) по лемме Картана, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta A_a = l_a\omega^5 + l_a\omega^5_3 + n_a\omega^5_4\\
&\omega^3_a - A_a\omega^3 = l_a\omega^5 + h_a\omega^5_3 + q_a\omega^5_4\\
&\omega^4_a - A_a\omega^4 = n_a\omega^5 + q_a\omega^5_3 + g_a\omega^5_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

На многообразии гиперплоскостей в R^5 главными являются формы $\omega^5, \omega^5_\lambda$. В силу (8) имеем трехпараметрическое семейство гиперплоскостей. Пусть $|A_1| + |A_2| > 0$. Из (10) видно, что если $\omega^5 = \omega^5_3 = \omega^5_4 = 0$, то

$$\Delta A_a = 0,\ \omega^3_a = A_a\omega^3, \omega^4_a = A_a\omega^4,$$

а это значит, что в каждой гиперплоскости выделяется двухпараметрическое семейство двумерных плоскостей. Найдем характеристику семейства гиперплоскостей. Напомним, что характеристической плоскостью семейства k-мерных плоскостей P^k называется плоскость P^l, через которую проходят все соседние с P^k плоскости $'P^k$. Пусть $B = M + z^\lambda e_\lambda$ — произвольная точка на гиперплоскости. Из определения характеристики следует, что $\omega^5 + z^\lambda\omega^5_\lambda = 0$ или

$$1 + z^a A_a = 0,\ z^3 = 0,\ z^4 = 0.$$

Итак, характеристикой нашего семейства гиперплоскостей является прямая, лежащая в $\pi(Q; h)$. Пусть теперь $A_a = 0$. Тогда $\omega^5_a = 0$, а вместо (10) будем иметь

$$\omega^3_a = h_a\omega^5_3 + q_a\omega^5_4,\ \omega^4_a = q_a\omega^5_3 + g_a\omega^5_4.$$

Если $\omega^5 = \omega^5_3 = \omega^5_4 = 0$, то $\omega^3_a = \omega^4_a = 0$. Тогда из (1) следует, что

$$dM = \omega^a e_a,\ de_a = \omega^b_a e_b,\ de_3 = \omega^4_3 e_4,\ de_4 = \omega^3_4 e_3,\ de_5 = \omega^i_5 e_i.$$

Итак, в каждой гиперплоскости получили семейство параллельных двумерных плоскостей. Легко заметить, что в данном случае у нашего семейства гиперплоскостей нет характеристики.

б) Пусть формы $\omega^5, \omega^5_3, \omega^5_4$ линейно зависимы. Скажем,

$$\omega^5_4 = \lambda\omega^5_3 + \mu\omega^5. \qquad (11)$$

Если продифференцировать соотношения (8) и (11) внешним образом и раскрыть по лемме Картана, то получим

$$\Delta A_a = m_a\omega^5 + n_a\omega^5_3,\quad \lambda A_a\omega^3 + A_a\omega^4 - \lambda\omega^3_a - \omega^4_a = n_a\omega^5 + p_a\omega^5_3,$$

$$\Delta\mu = v\omega^5 + v_1\omega^5_3,\quad \Delta\lambda = v_1\omega^5 + v_2\omega^5_3,$$

где

$$\Delta A_a = dA_a - A_b\omega^b_a - \mu\omega^3_a + A_a A_b\omega^b,$$

$$\Delta\mu = d\mu - \mu A_a\omega^a + (\mu)^2\omega^3 + \lambda\mu\omega^3_4 - A_a\omega^a_3 - \lambda A_1\omega^1_4,$$

$$\Delta\lambda = d\lambda + (\lambda)^2\omega^3_4 + \lambda\mu\omega^3 + \mu\omega^4 - \omega^4_3.$$

Найдем характеристику нашего двухпараметрического семейства гиперплоскостей $\Gamma^2(K)$. Пусть $T = M + t^a e_a$ — произвольная точка на $\gamma \in \Gamma^2(K)$. Из определения характеристики следует, что $\omega^3 + t^\lambda \omega^3_\lambda = 0$ или

$$1 + t^a A_a + t^3 \mu = 0, \quad t^3 \lambda + t^4 = 0. \tag{12}$$

Итак, характеристикой для $\Gamma^2(K)$ является двумерная плоскость (12), которая пересекается с каждой $h \in K_Q$ по прямой. Обозначим через $\Pi^6(K)$ шестипараметрическое семейство всех двумерных плоскостей, лежащих в $\Gamma^2(K)$ и пересекающихся с характеристикой (12) по прямой. В качестве допустимого комплекса возьмем произвольное пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей в $\Pi^6(K)$.

в) Пусть $\Gamma^1(K)$ — семейство гиперплоскостей, зависящее от одного параметра. Тогда $\omega^5_\lambda = A_\lambda \omega^5$, откуда видно, что уравнение $\omega^5 = 0$ вполне интегрируемо. Следовательно, R^5 расслаивается на однопараметрическое семейство гиперплоскостей. В качестве допустимого комплекса возьмем произвольное пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей, пересекающееся с каждой $\gamma \in \Gamma^1(K)$ по четырехпараметрическому семейству двумерных плоскостей.

Объединим полученные результаты в следующую теорему:

Теорема. *Допустимый комплекс K двумерных плоскостей в R имеет не более чем трехпараметрическое семейство касательных гиперплоскостей. Если семейство касательных гиперплоскостей зависит от трех параметров, то K образован либо двухпараметрическими семействами двумерных плоскостей, лежащих в касательных гиперплоскостях и проходящих через характеристические прямые семейства гиперплоскостей, либо параллельными между собой двумерными плоскостями (характеристики нет). Если семейство гиперплоскостей зависит от двух параметров, то допустимым комплексом будет произвольное пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей в шестипараметрическом семействе двумерных плоскостей, лежащих в касательных гиперплоскостях, которые пересекают характеристические плоскости семейства гиперплоскостей по прямой. Если семейство гиперплоскостей зависит от одного параметра, то имеем расслоение R^5 на это множество гиперплоскостей, а допустимый комплекс образуют пятипараметрические семейства двумерных плоскостей, пересекающихся с каждой нашей гиперплоскостью по четырехпараметрическому семейству двумерных плоскостей.*

Автор выражает искреннюю признательность А. М. Васильеву за внимание к работе и полезные советы.

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

R^5-ում երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների դասակարգումը

Դիցուք $H_{2,n}$-ը R^n-ում երկչափ հարթությունների բազմաձևությունն է, $K \subset H_{2,n}$-ը n չափանի ենթաբազմաձևություն է $H_{2,n}$-ում, K_Q-ն $Q \in R^n$ կետով անցնող երկչափ հարթություններով կազմված քառաչափ կոն է, $\pi(Q, h)$-ը K_Q կոնին $h \in K_Q$ կետում շոշափող հարթությունն է։

K կոմպլեքսը կոչվում է թույլատրելի, եթե համարյա բոլոր $Q \in R^n$ և $h \in K_Q$ համար $\pi(Q, h)$ հարթությունը որոշված է և կախված է միայն h-ից։

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե K-ն թույլատրելի կոմպլեքս է, ապա

$$\omega_a^\alpha = A_{a\beta}^\alpha \omega^\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{5, n}, \quad a = 1, 2,$$

որտեղ՝ ω^α, ω_a^α-ն H_{2n} բազմաձևության գլխավոր ֆորմերն են։

Երբ $n=5$, տրված է երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսների լրիվ դասակարգումը R^5-ում և նրանց երկրաչափական մեկնաբանությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев*, Функц. анализ и его приложения, т. 2, вып. 3 (1968). [2] *К. Майус*, Функц. анализ и его приложения, т. 7, вып. 1 (1973). [3] *К. Майус*, Функц. анализ и его приложения, т. 9, вып. 2 (1975).